ELEMENTOS DE DIBUJO PARA GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

I - TRAZADOS FUNDAMENTALES

por

JAVIER GARCÍA-GUTIÉRREZ MOSTEIRO



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

5-57-01

ELEMENTOS DE DIBUJO PARA GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

I - TRAZADOS FUNDAMENTALES

por

JAVIER GARCÍA-GUTIÉRREZ MOSTEIRO

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

5-57-01

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

NUEVA NUMERACIÓN

5 Área
57 Autor
01 Ordinal de cuaderno (del autor)

Todos los dibujos de este manual son del autor

Ilustración de cubierta: Detalle de *Melencolia I* (Alberto Durero, 1514)

Elementos de dibujo para geometría descriptiva.
I- Trazados fundamentales..

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid
Gestión y portada: Laura Bejerano Iglesias
CUADERNO 155.01
ISBN: 84-9728-088-1 (obra completa)
ISBN: 84-9728-089-X (vol.I)
Depósito Legal: M-49212-2003

Con la llegada del Plan del 96 la enseñanza de lo que convencionalmente entendemos como Geometría Descriptiva *conoció una radical renovación, encabezada por el entonces nuevo catedrático de la asignatura Enrique Rabasa. No era ya posible, reducidas las horas lectivas y concentradas éstas en un cuatrimestre, mantener -por recortes- el programa que hasta entonces se venía dando; era necesario otro enfoque, que aprovechara la ocasión para dar la vuelta a la asignatura; que sirviera para que ésta, pues que había de perder carga docente, perdiera a la vez todos aquellos aspectos no esenciales -a veces superfluos- a la formación del arquitecto.*

Contábamos -¡contamos!- para ello con la preparación del alumno que ingresa en la Escuela en materias básicas de dibujo y geometría (exigidas en los programas de Dibujo Técnico de Selectividad). Hemos visto en estos años que no siempre es así y que, con incómoda frecuencia, debíamos los profesores detener el ritmo del curso y distraer parte de los contados créditos en recordar -si no explicar ab initio- *aspectos simples, fundamentales de las construcciones geométricas. A reparar tal deficiencia -pero no sólo para ello- se orienta este manual; en sus tres partes* **Trazados fundamentales, Transformaciones en el plano** *y* **Líneas cónicas**, *que no escapan de la geometría plana -pero apetecen ya la geometría del espacio-, se cubre lo necesario para el manejo de los sistemas de representación y el estudio de superficies que hacemos en nuestro curso de Geometría Descriptiva.*

Este Elementos de dibujo... *se propone con dos estructuras paralelas, hasta cierto punto independientes pero complementarias y dialogantes entre sí: un discurso teórico, sintético, y un -pretendemos que suficientemente explícito- discurso gráfico (no es necesario aclarar que los* trazados *para «regla y compás» -los conceptos que ahí subyacen- no estorban, por cierto, al dibujo asistido por ordenador). Esperamos que método y contenido sean de fácil utilidad al alumno que empieza a formarse como arquitecto, que empieza a sentir qué papel juegan el dibujo y la geometría en esa formación; al alumno que empieza a dibujar* para ver...

0

Nomenclatura de partida

Los elementos geométricos de partida son *punto, recta* y *plano.* [1]

§ 1.0.1. **Punto.** El punto es el elemento adimensional. Puede ser *propio* o *impropio -punto del infinito-*; dar un punto del infinito equivale a dar una *dirección.*

§ 1.0.2. **Recta.** Dos puntos, propios o propio e impropio (aplicación de una dirección a un punto propio), determinan una *recta.* La recta es infinita; la *semirrecta* es una porción de recta a partir de un punto determinado de la misma; [2] el *segmento* es la porción de recta comprendida entre dos puntos cualesquiera de la misma -*extremos* del segmento-.

Los puntos de una recta están *alineados*; un conjunto cualquiera de ellos se denomina *serie rectilínea*, y la recta es, entonces, *base de la serie.*

La recta puede ser *propia* o *impropia -recta del infinito*: definida por dos puntos impropios-; dar una recta del infinito equivale a dar la *orientación* de un plano.

§ 1.0.3 **Plano.** Dos rectas incidentes, en un punto propio o impropio, determinan un *plano* ; [3] recíprocamente, dos rectas del plano -*coplanarias*- se cortan siempre: ya en un punto propio o impropio -en este último caso, rectas *paralelas*-.[4]

El plano es infinito; el *semiplano* es la región de un plano limitada a partir de una recta del mismo (ésta es, entonces, el *borde* de ambos semiplanos). Dos planos se cortan siempre: ya en una recta propia o impropia -en este último caso, planos *paralelos*-. [5]

El conjunto de rectas coplanarias incidentes en un punto se llama *haz de rectas*, [6] y el punto, *vértice del haz* ; el plano es, entonces, *base del haz.*

Línea plana o *curva plana* es la generada por un punto que se mueve en el plano; [7] si la línea se corta a sí misma lo hace en un *punto doble.* Dos posiciones infinitamente próximas del punto generador definen un *elemento rectilíneo* de la curva. El *orden* de una línea viene dado por el máximo número de puntos en que puede ser cortada por una recta.

Una *figura plana* o *forma plana* se determina por un conjunto de puntos o líneas contenidos en el plano.

§ 1.0.4. **Ángulo.** Dos rectas que se cortan determinan cuatro ángulos, iguales dos a dos los *opuestos por el vértice*; y *suplementarios* -esto es, que suman un *ángulo llano* (180º)- los que quedan en un mismo semiplano -*adyacentes*-. Las rectas que forman un ángulo son los *lados* de éste, y su punto de intersección, su *vértice.*

§ 1.0.5. **Perpendicularidad.** Una recta es *perpendicular* -u *ortogonal*- a otra cuando la corta formando ángulos iguales, esto es, en *ángulo recto* (90º). Según que un ángulo sea menor o mayor que el ángulo recto se denomina, respectivamente, *agudo* u *obtuso. Ángulos complementarios* son los que suman un recto.

---

[1] El desarrollo de las tres partes de este trabajo se restringe a la *geometría plana.*

[2] Las dos semirrectas en que así se divide la recta se denominan *opuestas.*

[3] Ello equivale a decir que tres puntos no alineados determinan un plano; y también, que si dos puntos de una recta están contenidos en un plano lo están también los infinitos puntos de la misma.

[4] Dos rectas paralelas tienen en común el punto del infinito (tienen la misma dirección).

[5] Dos planos paralelos tienen en común la recta del infinto (tienen la misma orientación).

[6] También, *haz de rayos* o *radiación plana.*

[7] Restringimos de esta manera al plano la definición general de línea o curva: la generada por un punto que se mueve en el espacio. La curva plana se denomina a veces de *simple curvatura*, en oposición a la curva en el espacio -*alabeada* o de *doble curvatura*-.

§ 1.0.6. **Distancia.** Si trazamos desde un punto la perpendicular a una recta obtenemos un segmento que da la *distancia* del punto a la recta; el *pie* del segmento sobre la recta es la *proyección ortogonal* del punto sobre la misma.

§ 1.0.7 **Tangencia.** La recta que une dos puntos infinitamente próximos de una línea es *tangente* a ella en tal *punto de tangencia*; [1] si el punto de contacto es impropio la recta se denomina *asíntota*. La perpendicular a la tangente en el punto de tangencia es la *recta normal* a la línea plana en ese punto.

Más estrictamente definimos la tangente a una línea, en un punto de la misma, como la posición límite de las rectas *secantes* definidas por ese punto de tangencia y un punto de la línea que se aproxima sucesivamente al primero. [2] Para los puntos *ordinarios* de una línea plana esa posición límite es la misma tanto si la aproximación del punto se hace por uno u otro lado del punto de tangencia; [3] si esto no es así la línea presenta en ese punto dos tangentes distintas y hablamos, entonces, de *punto anguloso*.

Entre los puntos de tangente única, junto a los puntos ordinarios de la curva (las dos ramas de ésta quedan en el mismo semiplano que define la tangente, a uno y otro de la normal), cabe distinguir los *puntos de inflexión* : cuando las dos ramas de la curva quedan a uno y otro lado de los semiplanos que definen la tangente y la normal; y aun los *puntos estacionarios* o de *retroceso*: cuando las dos ramas de la curva se encuentran en el mismo semiplano que define la normal (punto de retroceso *de primera especie*, si a uno y otro lado de la tangente; y *de segunda especie*, si del mismo lado de ésta).

Dos líneas tienen *acuerdo tangente* en un punto común si ambas tienen la misma recta tangente -y, por ende, la misma normal- en ese punto.

Dos líneas se cortan ortogonalmente si las tangentes -o las normales- en el punto de intersección son perpendiculares.

§ 1.0.8 **Lugar geométrico.** Decimos que una figura es el *lugar geométrico* de los puntos del plano para una determinada condición cuando todos sus puntos cumplen esa condición y, de modo recíproco, contiene todos los puntos del plano que la cumplen.

---

[1] Podemos definirla también como prolongación del elemento rectilíneo [§ 1.0.3].

[2] Cabe distinguir así, para *puntos de retroceso*, las tangentes de *primera* y *segunda especie* (estas últimas satisfacen la primera definición que hemos dado, pero no la segunda). En un punto de una curva se puede trazar sólo una tangente *ordinaria* (de primera especie) y ninguna o infinitas de segunda especie.

[3] Obsérvese la correspondencia con lo que en análisis matemático llamamos *derivabilidad* de una curva en un punto.

1
Operaciones previas

§ 1.1.1 **Los instrumentos euclidianos: regla y compás**

Todas las construcciones gráficas que vamos a necesitar se basan en el manejo de dos herramientas fundamentales: la regla y el compás -*instrumentos euclidianos*-; y con éstas se pueden llevar todas ellas a cabo (independientemente de que nos lleguen a servir de ayuda algunos otros -muy pocos- instrumentos: en especial, las plantillas -*escuadra* y *cartabón*-).

Con la regla y el compás son válidas las siguientes operaciones básicas:

- Recta definida por dos puntos
- Intersección de dos rectas
- Trazado de la circunferencia
- Intersección de recta y circunferencia
- Intersección de dos circunferencias

A partir de aquí podemos establecer las construcciones gráficas fundamentales con regla y compás.

§ 1.1.2 **Transporte de un segmento.** El transporte de una medida con compás -radio de la circunferencia- es inmediato [*fig. 1*]. Permite, junto a otras operaciones básicas, la suma [1] y diferencia de segmentos: disponiéndolos yuxtapuestos o superpuestos, respectivamente [*fig. 2*].

§ 1.1.3 **Transporte de un ángulo.** El transporte de un ángulo con regla y compás -por *triangulación*- [*fig. 3*] hace innecesario el uso del *transportador de ángulos*. Permite, entre otras operaciones básicas, la suma [2] y diferencia de ángulos: disponiéndolos yuxtapuestos o superpuestos, respectivamente [*fig. 4*] .

§ 1.1.4 **Recta paralela a otra, pasando por un punto.** La construcción se realiza por transporte de un ángulo, ya que una recta que corta a dos paralelas determina con éstas iguales *ángulos alternos internos* [*fig. 5*].

§ 1.1.5 **División de un segmento en partes iguales o proporcionales.** La construcción se basa en el *teorema de Thales*: rectas paralelas que cortan a dos rectas coplanarias cualesquiera determinan sobre éstas segmentos proporcionales [3] [*fig. 6*]

§ 1.1.6 **Perpendicular a una recta.** La intersección de dos arcos de circunferencia cualesquiera cuyos centros estén situados en la recta determina una perpendicular a la misma (procedimiento básico de obtención del ángulo recto) [*fig. 7*]. Las construcciones de la perpendicular desde un punto -sin tener que variar el radio del compás- o en un punto de la recta son inmediatas.

§ 1.1.7 **Mediatriz de un segmento.** La *mediatriz* de un segmento, lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos, es la perpendicular al segmento en su punto medio; vale por tanto, tomando como centros los extremos, la construcción anterior [*fig. 8*].

§ 1.1.8 **Bisectriz de un ángulo.** La *bisectriz* de un ángulo, lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados de éste, lo divide en dos ángulos iguales; vale, por tanto, trazar dos arcos iguales desde dos puntos, de cada lado, equidistantes del vértice [*fig. 9*]. Las dos bisectrices -*interior* y *exterior*- de un ángulo (bisectrices de ángulos adyacentes) son perpendiculares entre sí .

§ 1.1.9 **Trisección del cuadrante de circunferencia.** La operación de dividir un ángulo en partes iguales no es, en general, [4] resoluble con regla y compás; sí es posible la división en tres partes del cuadrante de circunferencia, mediante arcos de igual radio al de la circunferencia y concéntricos con los extremos del mismo (obtención del ángulo de 30º y sus múltiplos) [*fig. 10*].

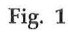
---

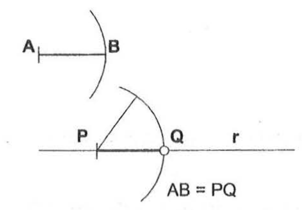
[1] Por consiguiente, permite también la multiplicación de segmentos por números enteros.

[2] Por consiguiente, permite también la multiplicación de ángulos por números enteros.

[3] La multiplicación de un segmento por un números racional es, pues, posible (ya que lo es su multiplicación y división por enteros).

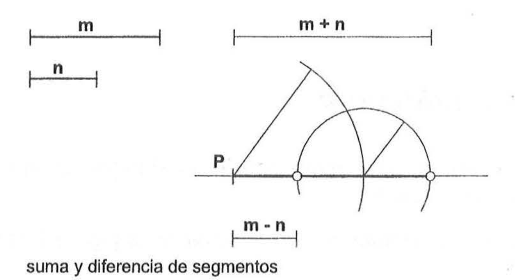
[4] Junto a otros casos particulares [§ 1.15.2], siempre es posible la división por mediatrices sucesivas; esto es, la división de cualquier ángulo en un número de partes $n = 2^m$ (siendo *m* un número natural).





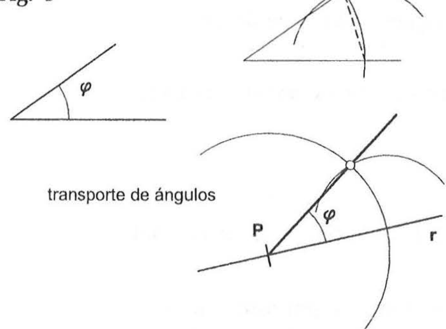
transporte de segmentos

Fig. 2



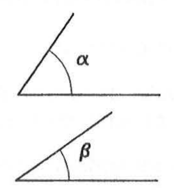
suma y diferencia de segmentos

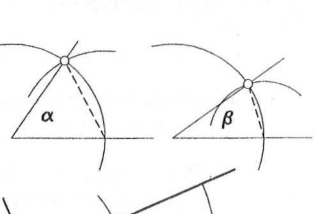
Fig. 3



transporte de ángulos

Fig. 4





suma y diferencia de ángulos

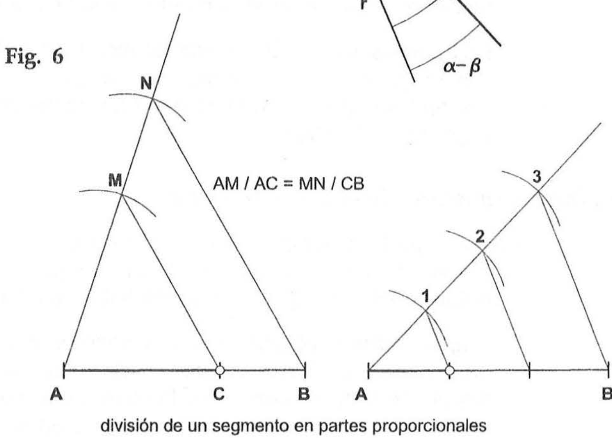
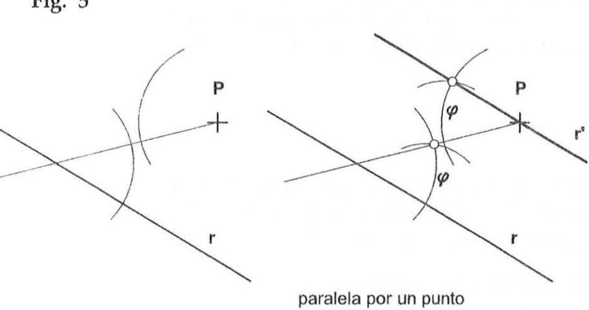


Fig. 5

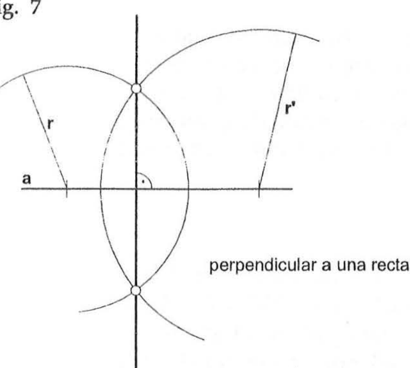


paralela por un punto

Fig. 6

división de un segmento en partes proporcionales

Fig. 7



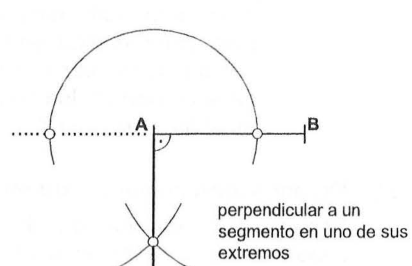
perpendicular a una recta

P

P'

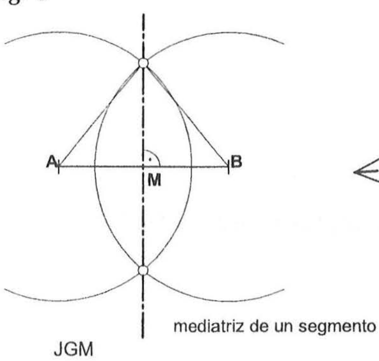
a

perpendicular a una recta desde un punto



perpendicular a un segmento en uno de sus extremos

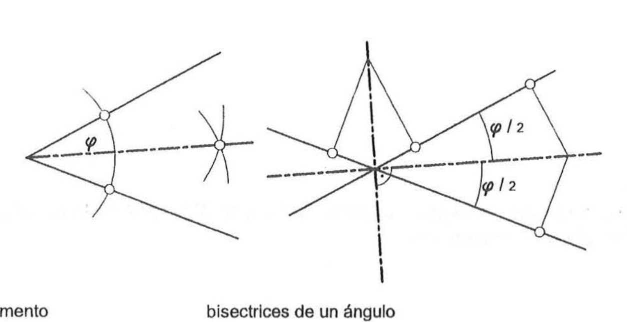
Fig. 8



mediatriz de un segmento

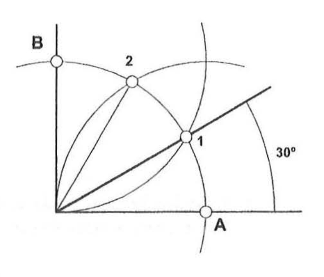
JGM

Fig. 9



bisectrices de un ángulo

Fig. 10



tripartición del cuadrante

2
La circunferencia

§ 1.2.1 **Circunferencia.** La *circunferencia* es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan *-radio-* de un punto *-centro-*.

Tres puntos determinan una circunferencia [*fig. 1*]; si los tres están alineados la circunferencia degenera en recta.

§ 1.2.2 **Posiciones relativas de recta y circunferencia** [*fig. 2*]

- *Recta exterior* : ningún punto en común
- *Recta tangente* : un solo punto en común *-punto de tangencia-*; la tangente a la circunferencia es la perpendicular al radio en el punto de tangencia
- *Recta secante* : dos puntos en común. El segmento que éstos determinan es la *cuerda* ; si pasa por el centro: *diámetro*.

§ 1.2.3 **Posiciones relativas de dos circunferencias** [*fig. 3*]

- Ningún punto en común : *circunferencias exteriores* o una *interior* a la otra (caso particular del último, las *concéntricas*).
- Un solo punto en común (de tangencia : la tangente en ese punto es común y, por tanto, los dos radios están alineados): *circunferencias tangentes exteriores* o *tangente interior* una a la otra.
- Dos puntos en común : *circunferencias secantes* ; caso particular, si los radios correspondientes a esos puntos -y, por tanto, sus tangentes- son perpendiculares: *circunferencias ortogonales* (evidentemente, la tangente a cada una de ellas en esos puntos de intersección ha de pasar por el centro de la otra).

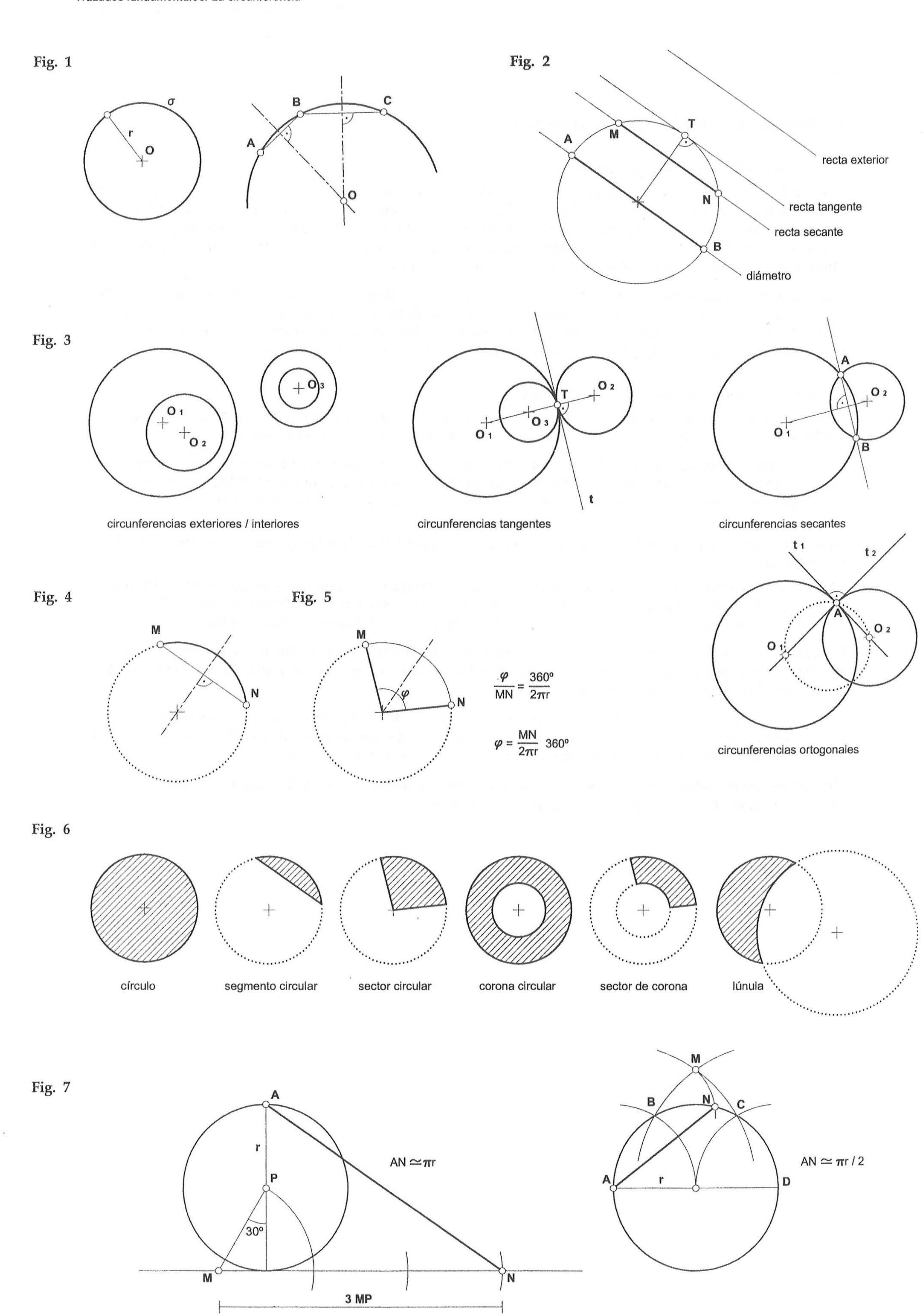
§ 1.2.4 **Otros elementos de la circunferencia**

- *Arco* : parte cualquiera de la línea de una circunferencia; un arco determina una cuerda, y viceversa. La mediatriz de la cuerda pasa por el centro de la circunferencia; para un arco determinado, el segmento de mediatriz que limita con su cuerda es la *flecha*. [*fig. 4*]
- *Ángulo central* : el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia; determina sobre ésta un *arco correspondiente* (*semicircunferencia*; si el ángulo es llano; *cuadrante*, si recto). Para un ángulo central cualquiera su bisectriz, que cortará en dos partes iguales al arco que determina, es la mediatriz de la cuerda correspondiente. [*fig. 5*]
- *Círculo* : es el área comprendida por una circunferencia. Si atendemos a la limitada entre un arco y su cuerda hablamos de *segmento circular* (*semicírculo*, cuando la cuerda es diámetro); y si al área comprendida entre un arco y sus radios, *sector circular*. *Corona circular* es el área comprendida entre dos circunferencias concéntricas, cuya diferencia de radios nos da la *anchura de la corona* ; si la corona está limitada por dos radios, hablamos de *sector de corona*. La *lúnula* es el área comprendida entre dos circunferencias secantes. [*fig. 6*]

§ 1.2.5 **Métodos aproximados para rectificar la circunferencia**

Sabido es lo imposible de obtener con regla y compás la *cuadratura del círculo* (la obtención de un cuadrado *equivalente* -esto es, de igual área- a un círculo) o, lo que es igual, la rectificación de la circunferencia; [1] una y otra se frustran por la imposibilidad de establecer por medios gráficos el *número* π -esto es, la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro- . No obstante, existen métodos aproximados, que pueden ser útiles [*fig. 7*]: el de Kochansky nos da la longitud de la semicircunferencia; el de Mascheroni (a partir del hexágono regular y cómodo por cuanto sólo usa el compás) nos da la longitud del cuadrante.

[1] Esta cuestión, tan debatida a lo largo de los siglos -alcanzando incluso al lenguaje coloquial-, fue zanjada en 1882 como consecuencia de los estudios de Lindemann.


Fig. 1
σ
r
O
A
B
C
O
Fig. 2
A
M
T
N
B
recta exterior
recta tangente
recta secante
diámetro
Fig. 3
O 1
O 2
O 3
T
O 2
O 1
O 3
t
A
O 2
O 1
B
circunferencias exteriores / interiores
circunferencias tangentes
circunferencias secantes
t 1
t 2
A
O 1
O 2
circunferencias ortogonales
Fig. 4
M
N
Fig. 5
M
φ
N
$\frac{\varphi}{MN} = \frac{360^\circ}{2\pi r}$
$\varphi = \frac{MN}{2\pi r}\, 360^\circ$
Fig. 6
círculo
segmento circular
sector circular
corona circular
sector de corona
lúnula
Fig. 7
A
r
P
30º
M
N
3 MP
AN ≃ πr
procedimiento de Kochansky
M
B
N
C
A
r
D
AN ≃ πr / 2
procedimiento de Mascheroni

3
La tangencia en la circunferencia

§ 1.3.1 Rectas tangentes a la circunferencia

El trazado de la tangente en un punto de la circunferencia se establece por la condición de ortogonalidad entre ella y el correspondiente radio [*fig. 1*]. También, el de las tangentes -y sus puntos de tangencia- desde un punto exterior: tangente y radio han de cortarse en el arco capaz de 90° del segmento que define el punto con el centro de la circunferencia; si el punto es impropio -*tangentes según una dirección dada*- basta con trazar el diámetro perpendicular a esa dirección.

Las tangentes comunes -*exteriores* o *interiores*- a dos circunferencias exteriores reflejan la doble *homotecia -directa* o *inversa* respectivamente- que se establece entre dos circunferencias cualesquiera; en cualquier caso, su construcción [*fig. 2*] se reduce al trazado de tangentes desde un punto. Si las circunferencias son secantes, es claro, sólo admiten tangentes comunes exteriores.

§ 1.3.2 Circunferencias tangentes entre sí [*fig. 3*]

Las circunferencias tangentes entre sí tienen en común la tangente en el punto de contacto; éste y los dos centros quedan, por tanto, alineados en la *recta de centros*, perpendicular a la tangente.

Teniendo en cuenta que dos circunferencias tangentes se corresponden en una homotecia cuyo centro es el punto de tangencia, por este punto ha de pasar la recta que une dos puntos homólogos obtenidos por radios paralelos (de sentido contrario si son tangentes exteriores, y de igual sentido si interiores).

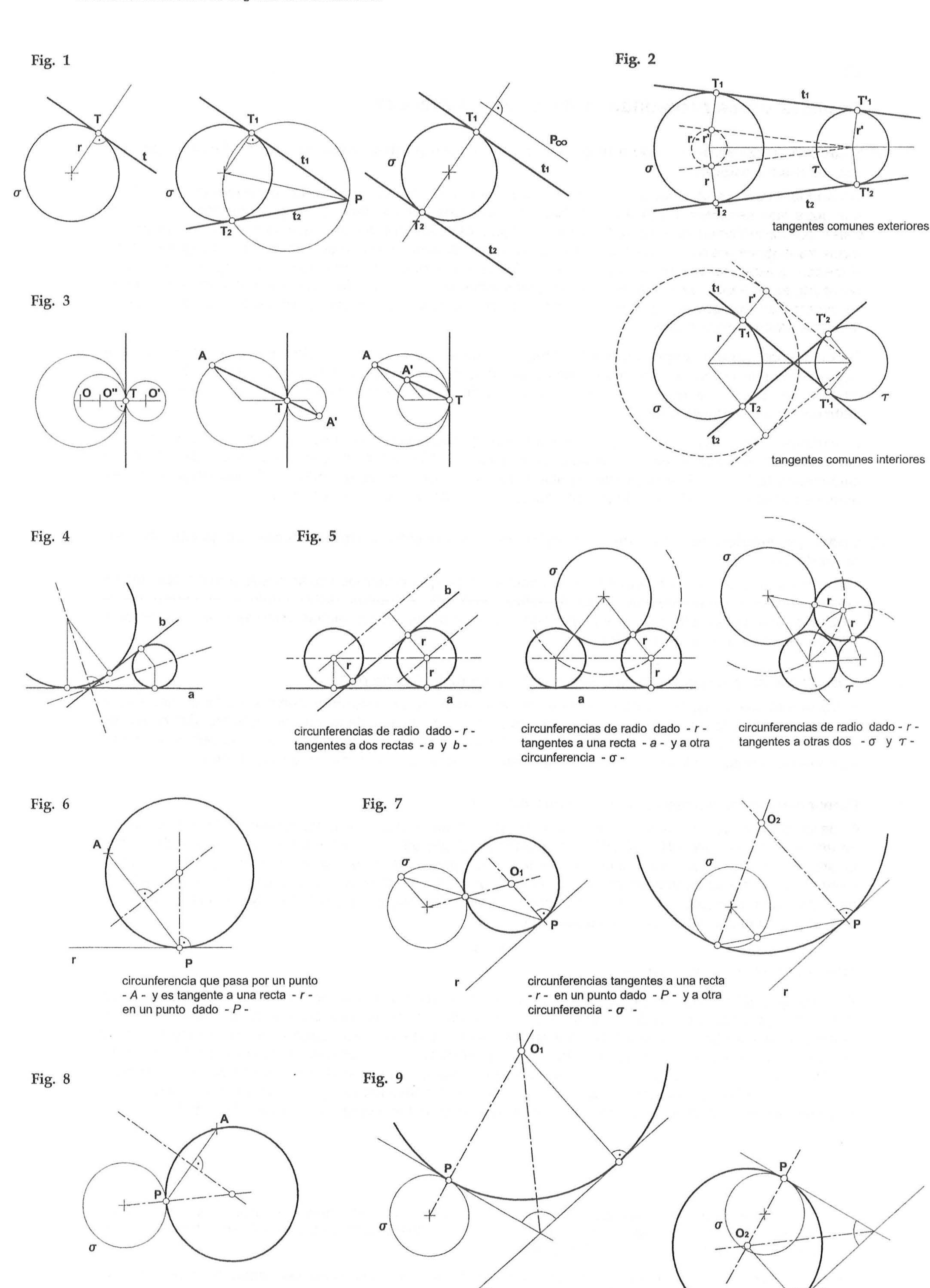
§ 1.3.3 Algunos lugares geométricos de los centros de circunferencias tangentes a rectas o a otras circunferencias

El lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a una recta en un punto de la misma es la normal a la recta en ese punto; y el de los centros de las circunferencias tangentes a otra circunferencia en un punto dado de la misma es la recta que determinan el centro de ésta y ese punto.

El lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a dos rectas es el que constituyen las dos bisectrices de los ángulos que esas rectas determinan [*fig. 4*]; en el caso particular de que las rectas sean paralelas, será la *paralela media*.

El lugar geométrico de los centros de las circunferencias de radio determinado r tangentes a una circunferencia de radio R es el que definen las dos concéntricas con ésta de radios $R+r$ y $R-r$; en la recta -caso particular del anterior- viene dado por las dos paralelas a distancia r.

Con estas elementales observaciones se resuelve buen número de casos de tangencia [*figs. 5 - 9*]; otros enunciados [§ 1.5] requieren un mayor aparato geométrico.


Fig. 1
T
r
t
σ
T1
t1
P
t2
T2
P∞
Fig. 2
T1
t1
T'1
r'
r
τ
T2
t2
T'2
tangentes comunes exteriores
tangentes comunes interiores
Fig. 3
O
O"
T
O'
A
A'
Fig. 4
b
a
Fig. 5
circunferencias de radio dado - r - tangentes a dos rectas - a y b -
circunferencias de radio dado - r - tangentes a una recta - a - y a otra circunferencia - σ -
circunferencias de radio dado - r - tangentes a otras dos - σ y τ -
Fig. 6
A
P
r
circunferencia que pasa por un punto - A - y es tangente a una recta - r - en un punto dado - P -
Fig. 7
O1
O2
P
r
circunferencias tangentes a una recta - r - en un punto dado - P - y a otra circunferencia - σ -
Fig. 8
A
P
σ
circunferencia que pasa por un punto - A - y es tangente a otra circunferencia - σ - en un punto dado - P -
Fig. 9
O1
O2
P
r
circunferencias tangentes a otra circunferencia - σ - en un punto dado - P - y a una recta - r -

4
Algunas útiles propiedades de la circunferencia

§ 1.4.1 El arco de circunferencia como lugar geométrico de los puntos desde los que se ve un segmento con un mismo ángulo

Un *ángulo inscrito* a una circunferencia es el que tiene su vértice en un punto cualquiera de la misma y sus lados son secantes; es fácil comprobar que, para una cuerda dada, un ángulo inscrito cuyos lados pasen por los extremos de ésta, vale la mitad del arco central correspondiente, lo que equivale a decir que todos los ángulos inscritos que cubren una misma cuerda son iguales (concretamente, son iguales entre sí los que quedan del mismo lado de la cuerda; los de uno y otro lado son suplementarios) [*fig. 1*]. Caso particular es el *ángulo semiinscrito*, uno de cuyos lados es tangente a la circunferencia (sobre esta recta se determinan -ya que el otro de sus lados coincide con la cuerda correspondiente- los dos ángulos suplementarios mencionados).

De este modo, para un segmento dado, el lugar geométrico de los vértices de los ángulos de igual valor cuyos lados son incidentes con los extremos de dicho segmento -puntos desde los cuales decimos que éste se *ve* bajo un ángulo constante- es un arco de circunferencia denominado *arco capaz* de ese segmento para el ángulo dado.

La definición de ángulo inscrito y semiinscrito nos proporciona directamente la construcción del arco capaz de un segmento para un ángulo dado [*fig. 2*]. Evidentemente, el arco capaz de 90º es la circunferencia [*fig. 3*] (que puede, también, definirse como lugar geométrico de los vértices de los ángulos rectos cuyos lados pasan por dos puntos fijos -extremos de un diámetro-).

§ 1.4.2 Lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas trazadas desde un punto de una circunferencia

Los puntos medios de las cuerdas de una circunferencia que podemos trazar desde uno de sus puntos constituyen otra circunferencia, cuyo diámetro tiene por extremos dicho punto y el centro de la circunferencia inicial. Ello se prueba -teniendo en cuenta que entre dichas cuerdas hay un diámetro- siguiendo el teorema de Thales. [*fig. 4*]

§ 1.4.3 Los puntos de la circunferencia como intersección de haces de rectas

Si consideramos un diámetro de la circunferencia y tomamos sus extremos como vértices de dos haces de rectas que determinan en el radio perpendicular y en el semilado correspondiente del cuadrado circunscrito [*fig. 5*] segmentos proporcionales, las rectas homólogas de dichos haces -*haces proyectivos*- se cortan en puntos de la circunferencia (equivalente a decir que se cortan ortogonalmente). [1]

§ 1.4.4 Potencia de un punto respecto de una circunferencia

Si desde un punto cualquiera P trazamos rectas que corten a una circunferencia dada, el producto de los segmentos $PA.PA'$, $PB.PB'$, $PC.PC'$..., formados por dicho punto y los puntos en que cada recta corta a la circunferencia, es un valor k constante -*potencia* del punto respecto a la circunferencia-. Si el punto es exterior los dos segmentos tienen igual sentido -potencia *positiva*: $k > 0$-; si interior, tienen sentido opuesto -potencia *negativa*: $k < 0$-. Si el punto es exterior las tangentes desde éste limitan el haz de rectas secantes y, consecuentemente, se cumple que

$$k = PT^2$$

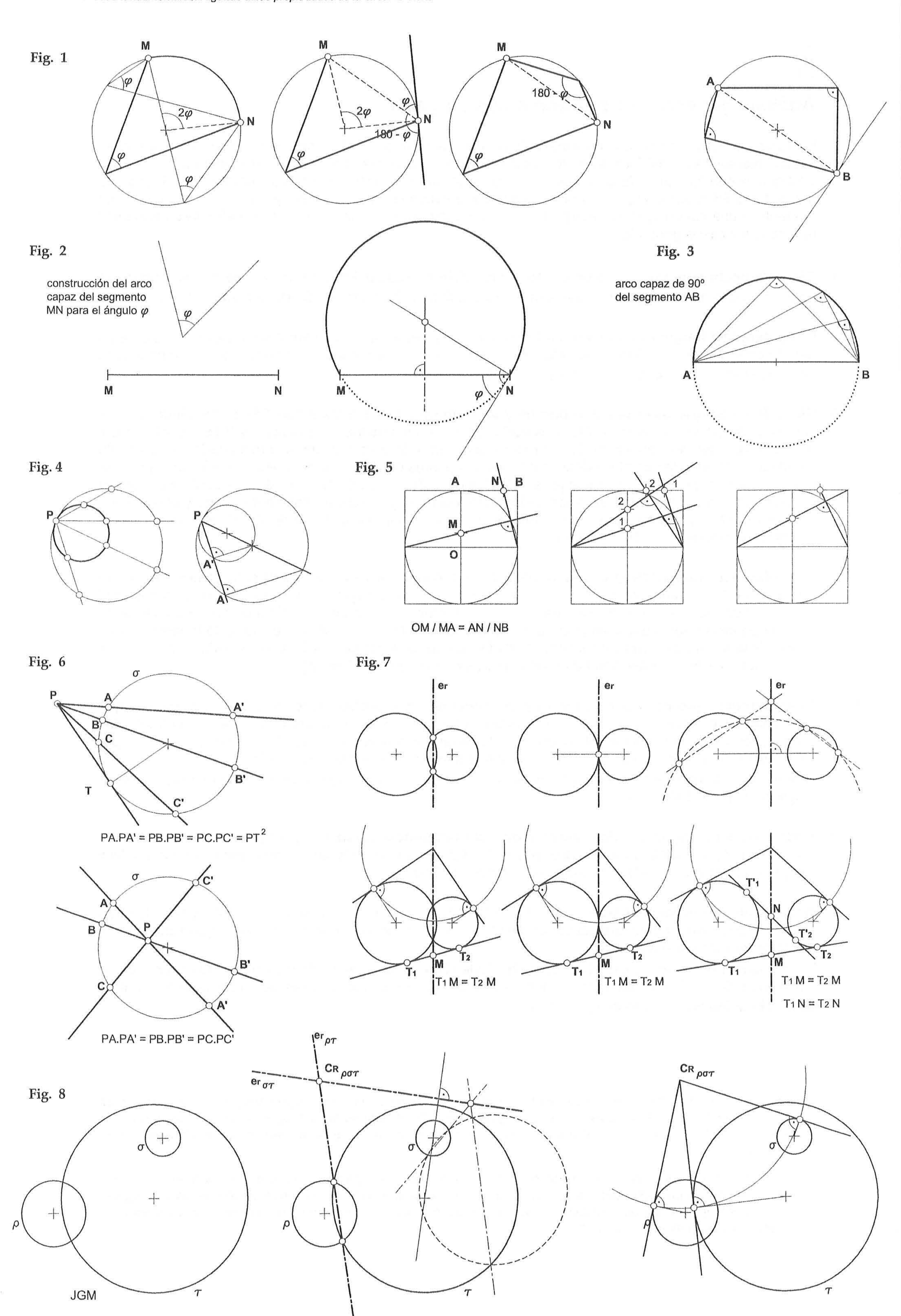
siendo T punto de tangencia. [*fig. 6*]

El lugar geométrico de los puntos de igual potencia respecto a dos circunferencias cualesquiera se denomina *eje radical* de esas circunferencias, y es una recta perpendicular a la que determinan los centros de ambas [*fig. 7*]; si las circunferencias son secantes (y a este caso -mediante interposición de una circunferencia auxiliar- podremos reducir cualquier otro) el eje radical ha de pasar por los dos puntos de intersección. El conjunto de circunferencias de eje radical común se denomina *haz de circunferencias coaxiales.* [2] Dadas tres circunferencias cualesquiera, la intersección de ejes radicales -dos a dos- define un punto -*centro radical*- que tiene igual potencia respecto de las tres circunferencias [*fig. 8*].

---

[1] Esta propiedad se mantiene, en cuanto a relación de incidencia (no, por tanto, en cuanto a ángulos), en las *transformaciones homológicas* y nos proporciona una cómoda obtención de puntos de la elipse; sobre todo cuando dividimos tales segmentos en dos partes iguales.

[2] El eje radical de dos circunferencias, en consecuencia, puede definirse como el lugar geométrico de los centros de las circunferencias ortogonales a ellas.


Fig. 1
M
N
2φ
φ
180 - φ
A
B
Fig. 2
construcción del arco
capaz del segmento
MN para el ángulo φ
Fig. 3
arco capaz de 90º
del segmento AB
Fig. 4
P
A'
A
Fig. 5
O
1
2
OM / MA = AN / NB
Fig. 6
σ
C
T
A'
B'
C'
PA.PA' = PB.PB' = PC.PC' = PT²
PA.PA' = PB.PB' = PC.PC'
Fig. 7
er
T₁
T₂
T'₁
T'₂
T₁ M = T₂ M
T₁ N = T₂ N
Fig. 8
er ρτ
er στ
CR ρστ
ρ
τ
JGM

5
Análisis general de circunferencias tangentes

Entre los distintos -y disímiles en cuanto a dificultad- casos de determinación de circunferencias tangentes cabe contemplar la cuestión a partir de tres condiciones: incidencia con un punto, tangencia con una recta y tangencia con otra circunferencia; condiciones éstas que se notan *P*, *r* y *c* respectivamente (de manera que la terna *PPc*, por ejemplo, enuncia el caso de la circunferencia que pasa por dos puntos dados y es tangente a una circunferencia dada); obteniendo las variaciones con repetición de estos tres elementos resultan diez casos generales.

§ 1.5.1 **Circunferencia que pasa por tres puntos (caso *PPP*).** Tres puntos determinan una circunferencia: se consideran dos de los segmentos que forman y se obtiene la intersección de sus mediatrices [§ 1.2.1].

§ 1.5.2 **Circunferencia tangente a tres rectas (caso *rrr*).** Las tres rectas determinan un triángulo y los centros han de estar en las bisectrices: las soluciones al problema vienen dadas, por tanto, por la circunferencia inscrita al mismo y las tres exinscritas [§ 1.11.1].

§ 1.5.3 **Circunferencia que pasa por dos puntos y es tangente a una recta (caso *PPr*).** Ateniéndonos a la noción de *potencia* el procedimiento es sencillo. La recta que une los dos puntos *A* y *B* será el eje radical de las dos circunferencias que se buscan; como éstas han de ser tangentes a la recta dada *r*, el punto de intersección *Q* de ésta con el eje definirá con los dos puntos de tangencia a obtener T_1 y T_2 el valor de la potencia ($QT_1 = QT_2$,) que será igual para todas las circunferencias del haz : basta con auxiliarnos de una circunferencia cualquiera del haz, trazar la tangente desde Q y llevar este segmento -a uno y otro lado de Q- sobre *r*, obteniendo los puntos de tangencia y, de ahí, sobre la mediatriz de *A* y *B*, los centros de las dos circunferencias solución. [1] [*fig. 1*]

§ 1.5.4 **Circunferencia que pasa por dos puntos y es tangente a otra circunferencia (caso *PPc*).** Se resuelve también siguiendo el concepto de *potencia* . Las circunferencias solución han de pertenecer al haz de circunferencias secantes que pasan por los puntos *A* y *B*, basta con obtener, haciendo intervenir la circunferencia dada y una cualquiera del haz, el centro radical C_R y, desde él, trazar la tangente a una de las circunferencias para obtener sobre la dada los puntos de tangencia T_1 y T_2 (siendo $C_RT_1 = C_RT_2 = C_RT$); a partir de ahí la obtención de los dos centros es inmediata. [2] [*fig. 2*]

§ 1.5.5 **Circunferencia que pasa por un punto y es tangente a dos rectas (caso *Prr*).** La circunferencia que buscamos ha de tener su centro en la bisectriz del ángulo que forman las rectas (de los dos ángulos posibles, el que contiene al punto), luego si ha de pasar además por un punto dado *A* también lo hará por su simétrico *B* respecto a esa bisectriz; estamos, entonces, en el anterior caso *PPr*.

Otra manera de resolverlo, con elegancia, es por homotecia: sirviéndonos de una circunferencia auxiliar tangente a ambos lados. [*fig. 3*]

§ 1.5.6 **Circunferencia tangente a dos rectas y otra circunferencia (caso *rrc*).** Dependiendo de la distinta disposición de los elementos (lo que posibilita distinto número de soluciones, hasta ocho) es fácil comprender gráficamente la reducción al caso anterior. [*fig. 4*]

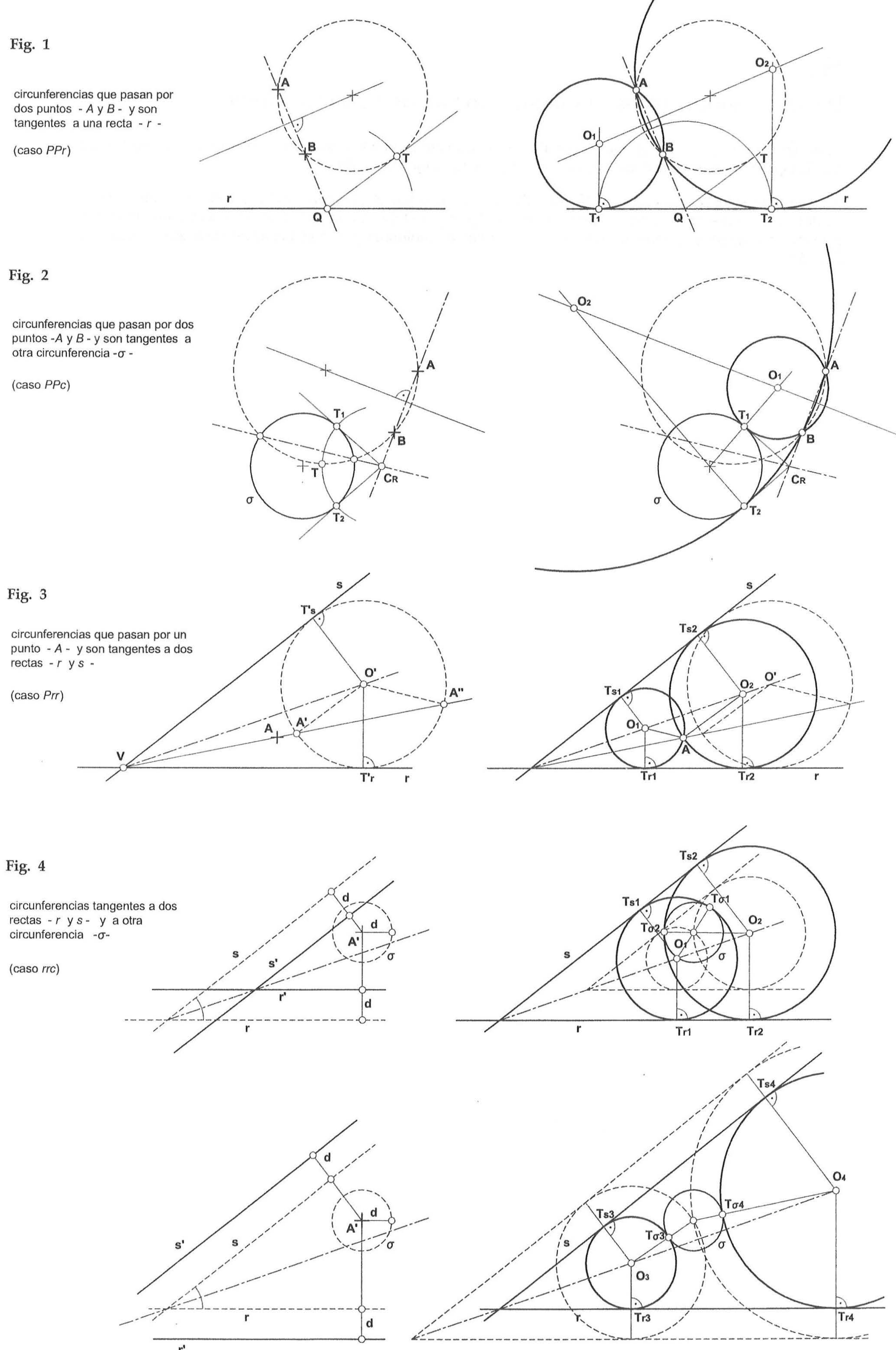
§ 1.5.7 **Circunferencia tangente a tres circunferencias (caso *ccc*).** La resolución de este caso -llamado *Problema de Apolonio*- requiere del conocimiento de las transformaciones por *inversión*, que escapa a los objetivos de esta parte del trabajo.

Lo mismo ocurre con los casos *Pcc* , *rcc* y *Prc*. Este último, cuando el punto pertenece a la circunferencia o a la recta, tiene, sin embargo, muy sencilla solución atendiendo a los lugares geométricos de los centros de las circunferencias tangentes [§ 1.3.3] .

---

[1] Si uno de los puntos está sobre *r* -caso de la circunferencia que pasa por un punto y es tangente a una recta en un punto dado de la misma- la construcción se simplifica, por intersección de los dos lugares geométricos, y sólo hay una solución [§ 1.3.3]. (Si los dos puntos están a distinto lado de la recta la solución, evidentemente, no es posible).

[2] Si uno de los puntos está sobre σ -caso de la circunferencia que pasa por un punto y es tangente a otra circunferencia en un punto dado de la misma- la construcción se simplifica, por intersección de los dos lugares geométricos, y sólo hay una solución [§ 1.3.3]. (Si los dos puntos están a distinto lado de la circunferencia la solución, evidentemente, no es posible).


Fig. 1
circunferencias que pasan por dos puntos - A y B - y son tangentes a una recta - r -
(caso PPr)
A
B
T
r
Q
O2
O1
T1
T2
Fig. 2
circunferencias que pasan por dos puntos -A y B - y son tangentes a otra circunferencia -σ -
(caso PPc)
A
B
T1
T
T2
CR
σ
O2
O1
Fig. 3
circunferencias que pasan por un punto - A - y son tangentes a dos rectas - r y s -
(caso Prr)
s
T's
O'
A''
A
A'
V
T'r
r
Ts2
Ts1
O2
O1
Tr1
Tr2
Fig. 4
circunferencias tangentes a dos rectas - r y s - y a otra circunferencia -σ-
(caso rrc)
d
A'
σ
s
s'
r'
r
Ts2
Ts1
Tσ1
Tσ2
O2
O1
Tr1
Tr2
Ts4
O4
Ts3
Tσ3
Tσ4
O3
Tr3
Tr4

JGM

6
Distintas figuras planas formadas con arcos de circunferencia

§ 1.6.1 Para dibujar curvas formadas por arcos de circunferencia tangentes entre sí se observa la condición de que los centros deben estar alineados con el punto de tangencia. [*fig. 1*]

Así se obtienen, por ejemplo: *espirales* de distintos centros [*fig. 2*]; curvas cerradas como el *óvalo* (cuatro centros y dos ejes de simetría perpendiculares) [*fig. 3*] o el *ovoide* (cuatro centros y un eje de simetría); y, en fin, curvas arquitectónicas como son los perfiles de molduras [*fig. 5*] y los arcos de múltiples centros [*fig. 6*].

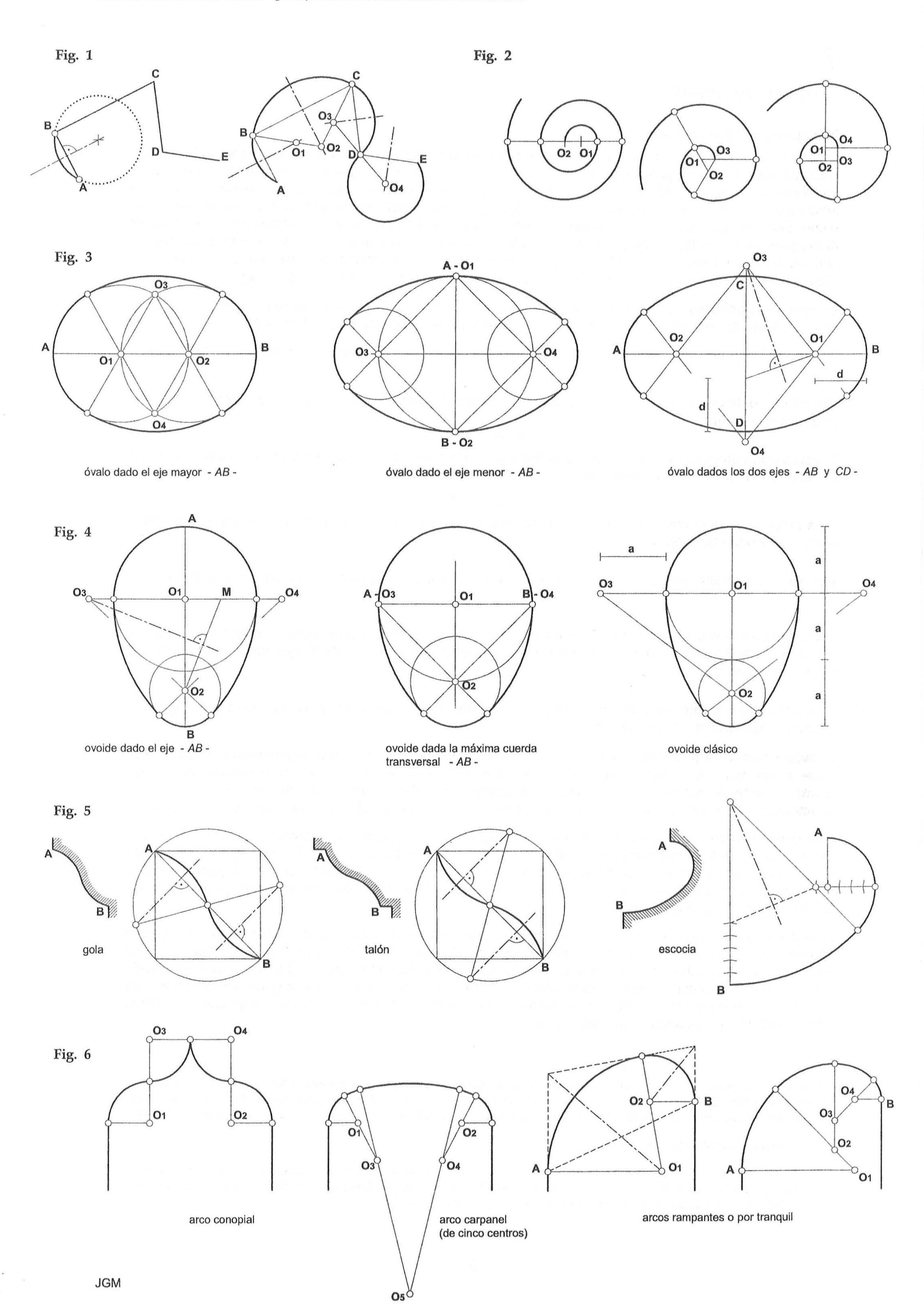


Fig. 1
C
B
D
E
A
C
O3
B
O1
O2
D
E
A
O4
Fig. 2
O2
O1
O3
O1
O2
O4
O1
O3
O2
Fig. 3
O3
A
O1
O2
B
O4
óvalo dado el eje mayor - AB -
A - O1
O3
O4
B - O2
óvalo dado el eje menor - AB -
O3
C
O2
O1
A
B
d
d
D
O4
óvalo dados los dos ejes - AB y CD -
Fig. 4
A
O3
O1
M
O4
O2
B
ovoide dado el eje - AB -
A - O3
O1
B - O4
O2
ovoide dada la máxima cuerda transversal - AB -
a
O3
O1
O4
a
a
a
O2
ovoide clásico
Fig. 5
A
B
gola
A
B
A
B
talón
A
B
A
B
escocia
A
B
Fig. 6
O3
O4
O1
O2
arco conopial
O1
O2
O3
O4
O5
arco carpanel (de cinco centros)
O2
B
A
O1
O4
B
O3
O2
A
O1
arcos rampantes o por tranquil

JGM

7
Proporcionalidad

§ 1.7.1 Semejanza y proporcionalidad

Dos figuras planas son *semejantes* cuando, con independencia de su tamaño, tienen la misma forma -por consiguiente, la misma proporción entre elementos y los mismos ángulos-.[1] Dependiendo de que se conserve o no el sentido de ordenación de los puntos homólogos hablamos, respectivamente, de *semejanza directa* o de *semejanza inversa* [*fig. 1*]. Si contemplamos la posición de las figuras en el plano, decimos que dos formas semejantes son *homotéticas* cuando están dispuestas en el plano de un modo particular: con los pares de puntos homólogos alineados con un punto fijo (lo que equivale a decir con las rectas homólogas paralelas) [*fig. 2*]. Este recurso a la semejanza, que sienta el teorema de Thales, posibilita la resolución de muchas construcciones gráficas [§ 1.3.1 , § 1.5.5]. [*fig. 3*]

En una semejanza los segmentos homólogos son *proporcionales*: la razón entre pares correspondientes es una constante -*escala*, si tomamos una de las dos figuras como referencia- [*fig. 4*].

La *proporción*, como igualdad entre razones, relaciona cuatro valores -*términos de la proporción*- :

$$a / b = c / d$$

Cuando el denominador de un miembro de la igualdad coincide con el numerador del otro es una *proporción continua*:

$$a / b = b / c$$

Si establecida una proporción se trata de hallar uno de los cuatro términos, dados los otros tres, hablamos de obtener el *cuarto proporcional* [*fig. 5*]:

$$a / b = c / x$$

Si la proporción es continua y se trata de hallar uno de los términos no repetido, hablamos de obtener el *tercero proporcional* [*fig. 6*]:

$$a / b = b / x$$

y si se trata de hallar uno de los términos que se repite, hablamos de obtener el *medio proporcional*:

$$a / x = x / b$$

Tanto la obtención del segmento cuarto proporcional como del tercero proporcional es aplicación directa del teorema de Thales; [2] no así la obtención del segmento medio proporcional, que requiere la aplicación de otros conceptos.

§ 1.7.2 Obtención del medio proporcional.

Obtención del medio proporcional. Hay tres rápidas formas de obtener gráficamente el segmento medio proporcional de dos segmentos dados:

Apoyándonos en la propiedad de potencia [§ 1.4.4], se superponen los dos segmentos conocidos y se hace pasar por los extremos del segmento diferencia así obtenido una circunferencia cualquiera (cómodamente, la que tiene por diámetro ese segmento); trazando desde el extremo común de ambos segmentos la tangente a la misma se obtiene, con el punto de tangencia, el segmento buscado. [3] [*fig. 7*]

Otro camino es por semejanza de triángulos rectángulos. Se disponen los segmentos uno a continuación del otro, se traza la circunferencia cuyo diámetro es ese segmento suma y, en fin, la perpendicular hasta la circunferencia por el punto de separación de los segmentos; es fácil advertir, en el triángulo rectángulo así obtenido, el *teorema de la altura* : la altura, tomando por base la hipotenusa, es medio proporcional de los segmentos en que divide a ésta. [*fig. 8*]

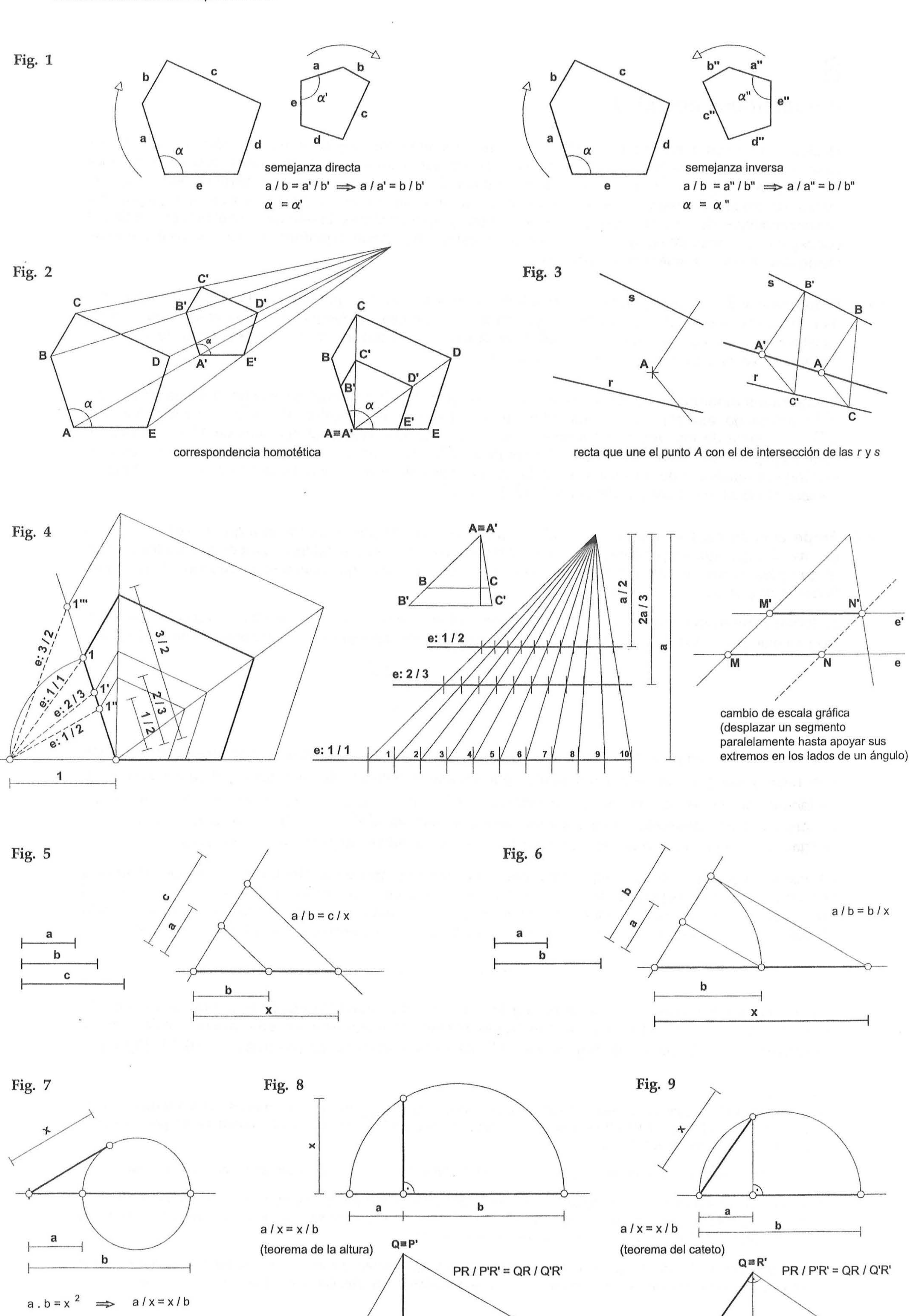
Esta construcción nos apunta otra. Se disponen los dos segmentos superpuestos -con un extremo común- y se traza la circunferencia cuyo diámetro es el mayor de los dos, por el extremo del menor se levanta la perpendicular, que corta a la circunferencia en un punto: el segmento que determina este punto con el extremo común es el medio proporcional; es fácil advertir, en los dos triángulos rectángulos que -uno contenido en el otro- se forman, el *teorema del cateto* : cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella. [*fig. 9*]

---

[1] Con muy otro punto de vista decimos que dos figuras planas, y cerradas, son *equivalentes* [§ 1.9.4] cuando con distinta forma comprenden igual área. Los *movimientos planos*, por otro lado, son transformaciones que sólo alteran la posición de las figuras, manteniendo la semejanza y el tamaño (*traslaciones*, *giros*, *simetrías centrales*).

[2] Principio de la construcción de *escalas gráficas*.

[3] El segmento que une los puntos de tangencia en la tangente común a dos circunferencias tangentes exteriores es medio proporcional entre los dos diámetros (el triángulo formado por dichos puntos y el punto de tangencia entre las dos circunferencias es rectángulo en este último vértice) [§ 1.4.4].


Fig. 1
semejanza directa
a / b = a' / b' ⟹ a / a' = b / b'
α = α'
semejanza inversa
a / b = a'' / b'' ⟹ a / a'' = b / b''
α = α''
Fig. 2
correspondencia homotética
Fig. 3
recta que une el punto A con el de intersección de las r y s
Fig. 4
e: 3 / 2
e: 1 / 1
e: 2 / 3
e: 1 / 2
e: 1 / 1
cambio de escala gráfica
(desplazar un segmento
paralelamente hasta apoyar sus
extremos en los lados de un ángulo)
Fig. 5
a / b = c / x
Fig. 6
a / b = b / x
Fig. 7
a . b = x 2 ⟹ a / x = x / b
Fig. 8
a / x = x / b
(teorema de la altura)
PR / P'R' = QR / Q'R'
Fig. 9
a / x = x / b
(teorema del cateto)
PR / P'R' = QR / Q'R'
JGM

8
Proporciones notables

§ 1.8.1 **Módulo y gnomon.** *Módulo* de un rectángulo es la razón entre las longitudes de sus lados; es común, por tanto, a todos los semejantes. *Gnomon* es la figura que yuxtapuesta a otra dada nos da una figura semejante a ésta [*fig. 1*]. *Rectángulo recíproco* de uno dado es su semejante, que tiene por lado mayor el menor de aquél, de modo que yuxtapuesto a su gnomon da el rectángulo inicial; las diagonales correspondientes de un rectángulo y su recíproco son perpendiculares: la reiteración del proceso define el concepto de *crecimiento gnomónico* y, asociado a éste, el de *espiral logarítmica* (cuyo *polo* es el punto de incidencia de las dos antedichas diagonales).

§ 1.8.2 **Proporción $\sqrt{2}$.** Si consideramos un cuadrado cuyo lado tomamos por unidad, la diagonal del mismo -por Pitágoras- vale $\sqrt{2}$; el rectángulo que tiene este módulo -*rectángulo* $\sqrt{2}$ - tiene la propiedad de constituirse, a su vez, por dos rectángulos de la misma proporción (podemos entonces decir que el rectángulo $\sqrt{2}$ es gnomon de sí mismo). [1] [*fig. 2*]

§ 1.8.3 **Rectángulos dinámicos.** Si consideramos un rectángulo $\sqrt{2}$, la diagonal del mismo -por Pitágoras- vale $\sqrt{3}$; reiterando así el procedimiento, obtenemos la serie de rectángulos $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ -o *doble cuadrado*-, $\sqrt{5}$ ... : serie de los *rectángulos dinámicos,* [2] de módulo irracional pero construibles con regla y compás [*fig. 3*]. Un rectángulo dinámico de módulo $\sqrt{n}$ (*n*, número entero) puede descomponerse en *n* rectángulos iguales y de su mismo módulo; lo que equivale a decir que su gnomon es un rectángulo semejante (igual, en el caso particular del $\sqrt{2}$). [*fig. 4*]

§ 1.8.4 **Proporción áurea.** La cuestión de dividir un segmento en dos partes de manera que el segmento total sea al subsegmento mayor como éste lo es al menor, esto es, la de establecer proporción continua entre el todo y las partes, origina una de las proporciones más notables y que más han interesado en la historia: la *divina proporción* o *sección áurea.* [3]

La formulación algebraica del problema enunciado nos lleva a una ecuación de segundo grado cuyas dos raíces conjugadas nos dan -por exceso y por defecto- el valor del *número* ϕ o *número de oro* : [4] [*fig. 5*]

$$\phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

El valor irracional del número ϕ (1, 618...; ó 0, 618... = 1 / ϕ) no impide que sea posible la construcción con regla y compás del segmento áureo -por exceso o defecto- de uno dado. El *rectángulo* ϕ o *rectángulo áureo* es el que tiene por módulo el número ϕ; su construcción es sencilla a partir del rectángulo doble cuadrado, cuya diagonal sabemos que es $\sqrt{5}$ [*fig. 7*]. De la construcción del rectángulo ϕ a partir del cuadrado deducimos que el cuadrado es el gnomon del rectángulo ϕ.

Otra cómoda construcción del segmento áureo, como medio proporcional [*fig. 6*]: dada una circunferencia llevamos sobre una perpendicular a su diámetro, en un extremo, la longitud del mismo -*d*- , y unimos el punto que se obtiene con el centro; los dos segmentos formados entre ese punto y los de corte con la circunferencia -*a* y *a+d*- son áureos, por defecto y por exceso, respecto del diámetro de la misma:

$$(a+d) / d = d / a$$

Una de las propiedades más relevantes de la sección áurea -también desde el punto de vista de su utilización histórica- es que el lado del pentágono regular y su diagonal estén en dicha proporción; como, así mismo, el lado del decágono regular y el radio de su circunferencia circunscrita [§ 1.16.1]. [*fig. 8*]

[1] Por tal razón este rectángulo se denomina *homotómico*: circunstancia aprovechada en la práctica para la definición de la serie DIN (el formato DIN A0 se establece como el rectángulo $\sqrt{2}$ de área 1 m^2; a partir de él, por sucesivas divisiones, se obtienen los demás).

[2] Denominación -debida a Hambidge- por oposición a los *rectángulos estáticos,* de lados en proporción racional.

[3] Luca Pacioli la denomina *Divina Proportione* en su célebre tratado homónimo (Venecia, 1509); y Leonardo da Vinci, *sección áurea* (de donde deriva *número de oro*). Para Kepler, que la llama *sección divina*, constituye «uno de los dos tesoros de la Geometría» (el otro, el teorema de Pitágoras).

[4] La designación con la letra griega ϕ se debe a Barr y Schooling, quienes así lo hicieron -se ha dicho que «en honor de Fidias»- en los anexos geométricos del estudio de Theodore Cook *The Curves of Life* (Londres, 1914).

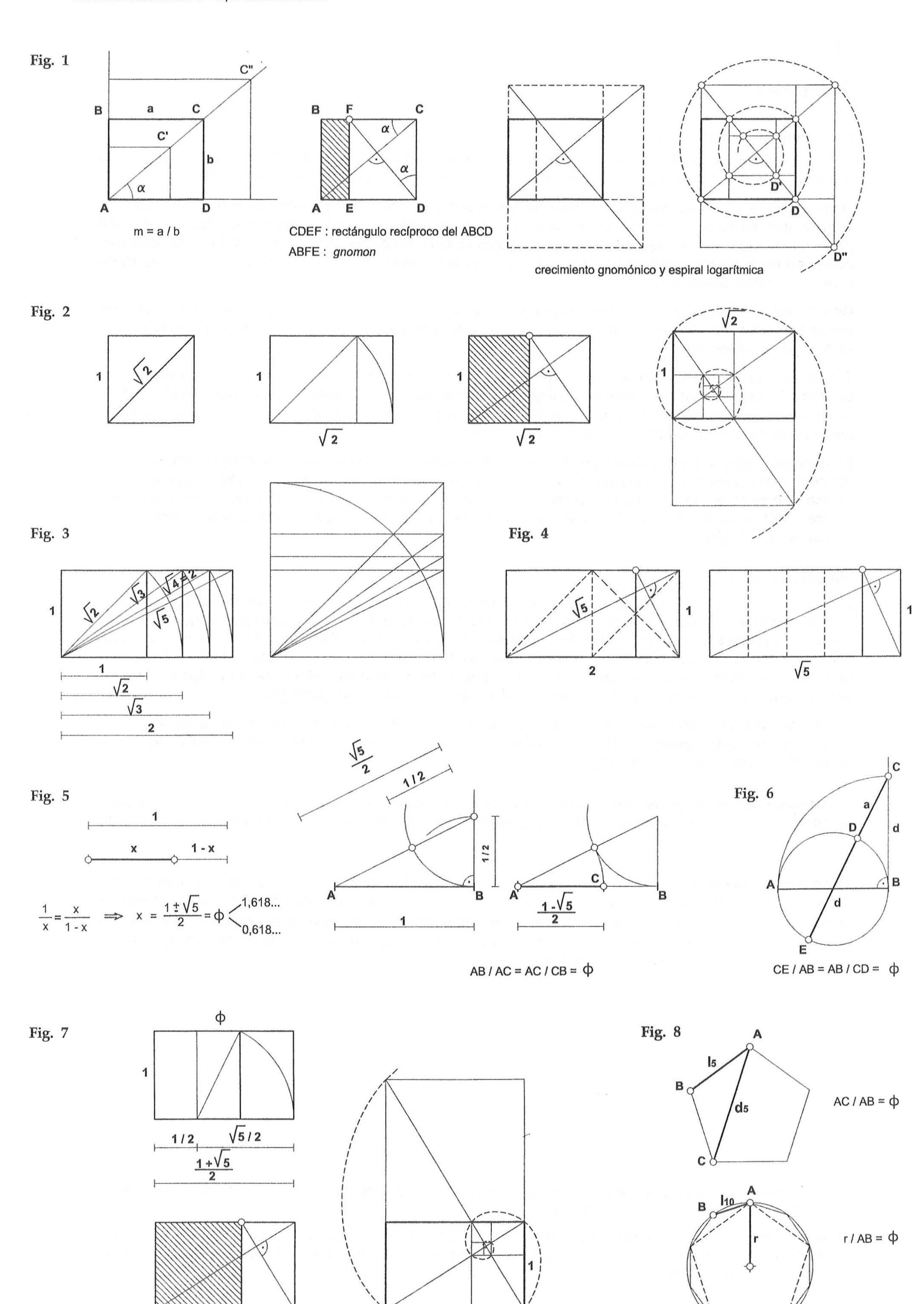


Fig. 1
B
a
C
C"
C'
b
α
A
D
m = a / b
B
F
C
α
α
A
E
D
CDEF : rectángulo recíproco del ABCD
ABFE : gnomon
D'
D
D"
crecimiento gnomónico y espiral logarítmica
Fig. 2
1
√2
1
√2
1
√2
√2
1
Fig. 3
1
√2
√3
√4=2
√5
1
√2
√3
2
Fig. 4
√5
1
2
1
√5
Fig. 5
1
x
1 - x
1/x = x/(1 - x) ⇒ x = (1 ± √5)/2 = φ
1,618...
0,618...
√5/2
1/2
1/2
A
B
1
A
C
B
(1 - √5)/2
AB / AC = AC / CB = φ
Fig. 6
C
a
D
d
A
B
d
E
CE / AB = AB / CD = φ
Fig. 7
φ
1
1/2
√5/2
(1 + √5)/2
1
φ
Fig. 8
A
l5
B
d5
C
AC / AB = φ
A
B
l10
r
r / AB = φ

9
Polígonos

§ 1.9.1 **Caso general de polígono**

Dado un número de puntos en el plano se obtiene, uniéndolos dos a dos en un cierto orden, una *línea poligonal* o *quebrada*. Los puntos son los *vértices* y los segmentos resultantes, los *lados*. [*fig. 1*]

Un *polígono* es una línea poligonal cerrada (el último punto se une con el primero, definiendo un *área*), de manera que en cada vértice se corten dos -y sólo dos- lados. Los lados definen así los *ángulos del polígono* -interiores-; los ángulos adyacentes a éstos se denominan *ángulos exteriores*. En todo polígono, dada una determinada ordenación de los vértices, los lados unen puntos consecutivos y las *diagonales*, puntos no consecutivos. [*fig. 2*]

De esta manera, la denominación de los polígonos se atiene a su número de ángulos o lados; hablamos así de *triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, heptágonos, octógonos, eneágonos, decágonos, undecágonos, dodecágonos...*

Tres puntos cualesquiera cierran un *triángulo* determinado. Pero más de tres determinan -dependiendo del sentido de ordenación- distintos polígonos; cuatro puntos del plano, por ejemplo, definen tres *cuadriláteros* diferentes: [1] la superposición de los tres -esto es, el conjunto de posibles lados o diagonales- se llama *cuadrilátero completo* o *cuadrivértice*. [*fig. 3*]

En general, dados *n* puntos del plano, definimos el *polígono completo* (o *n-vértice*) como la figura que se obtiene al unir cada vértice con los demás *n-1*; esto es, prescindiendo de la condición de que en cada vértice sólo se corten dos lados, la superposición de todos los polígonos que se pueden obtener con tales puntos. El número de tipos de polígonos de *n* lados que se pueden construir viene dado por la expresión 2^{n-3}. [*fig. 4*]

§ 1.9.2 **Polígonos convexos**

Un polígono es *convexo* si considerada la recta que determinan dos vértices consecutivos cualesquiera todo él queda a un mismo lado de la recta (un triángulo es siempre convexo, pero puede que no lo sea ninguno de los tres cuadriláteros que definen cuatro puntos dados del plano [*fig. 3*]). Este enunciado es coherente con la definición general de *figura convexa*: todo segmento que una dos puntos cualesquiera de una figura convexa está incluido en ella; así mismo, si desde un punto interior de un polígono convexo se traza una recta ésta corta en dos puntos a la línea de contorno del polígono. [*fig. 5*]

En un polígono convexo la suma de sus ángulos vale $(n - 2)\ 180^{o}$, siendo *n* el número de lados; lo cual es fácil de comprobar gráficamente, al considerar que la suma de los ángulos exteriores del polígono ha de ser 360º (esto es, dos llanos). [*fig. 6*]

§ 1.9.3 **Determinación general de polígonos.** El número de datos independientes que necesitamos para determinar cualquier polígono viene dado por el valor $2n - 3$, donde *n* es el número de vértices o de lados. [2]

§ 1.9.4 **Polígonos equivalentes.** *Polígonos equivalentes* son aquellos que, con distinta forma o con distinto número de lados, comprenden igual área. El que el área de todos los triángulos de igual base y altura sea la misma [§ 1.10.1] brinda un camino sencillo -desplazando un vértice cualquiera en paralelo a la recta que definen sus dos adyacentes- para transformar un polígono cualquiera de *n* lados en otro equivalente de *n - 1* lados, hasta llegar al triángulo. [*fig. 7*]

---

[1] En geometría del espacio, al tratar determinadas superficies, hablamos del *cuadrilátero alabeado*, esto es, el constituido por cuatro puntos no coplanarios.

[2] Los datos deben ser independientes; por ejemplo, para la definición de un triángulo [§ 1.10.1], que requiere tres datos, observamos que no basta con conocer sus tres ángulos -no son tres datos independientes-: dados dos de ellos, el tercero es conocido.

Fig. 1

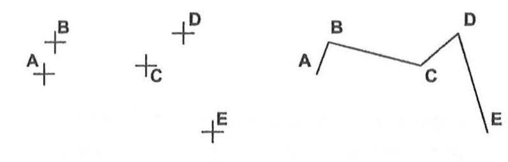


Fig. 2

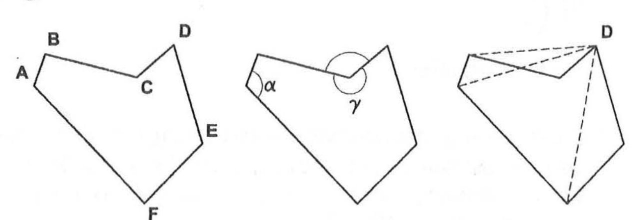
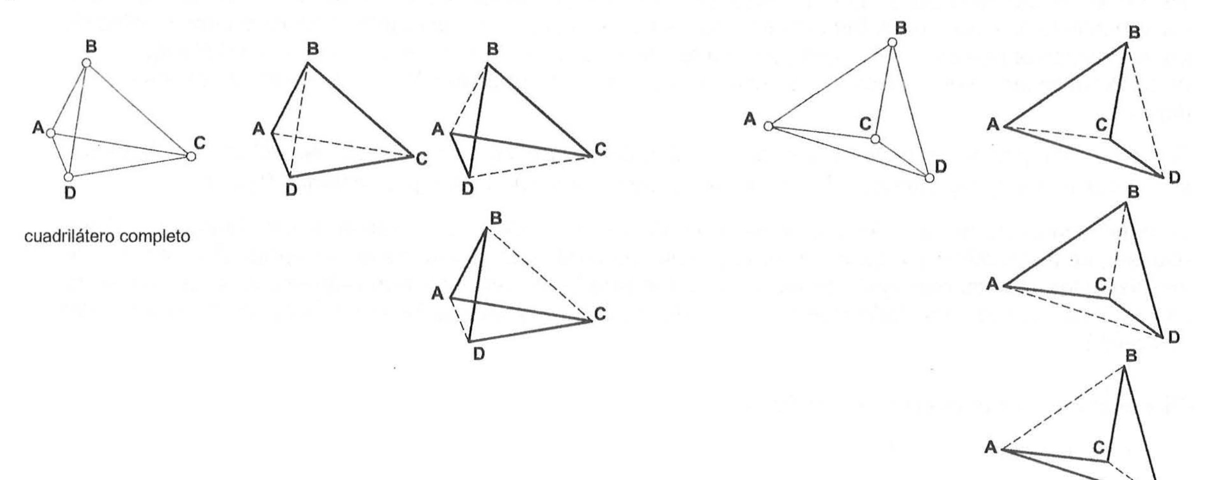
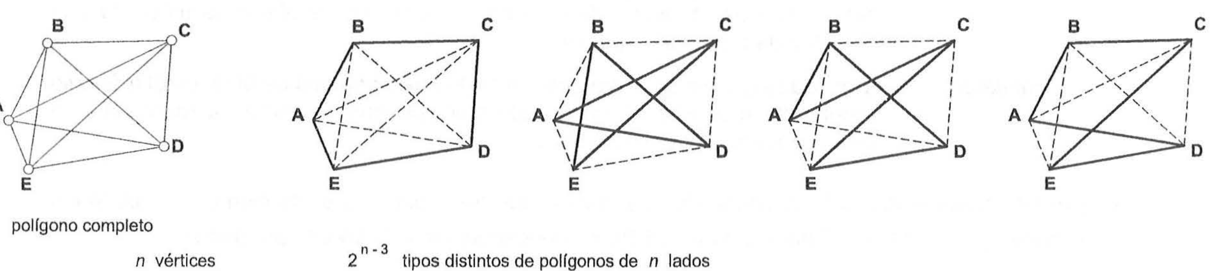


Fig. 3



cuadrilátero completo

Fig. 4



polígono completo

n vértices

$\frac{n\,(n-1)}{2}$ lados

2^{n-3} tipos distintos de polígonos de n lados

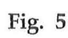
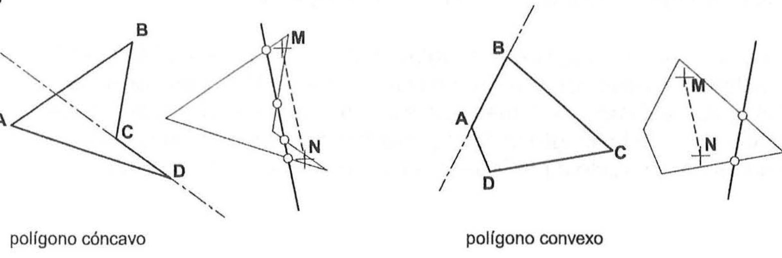


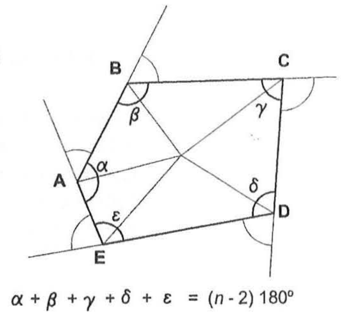
Fig. 5



polígono cóncavo

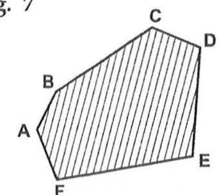
polígono convexo

Fig. 6

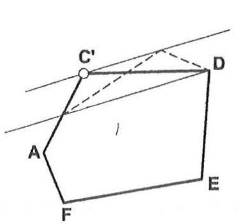


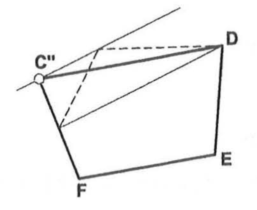
$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = (n - 2)\,180^{\circ}$

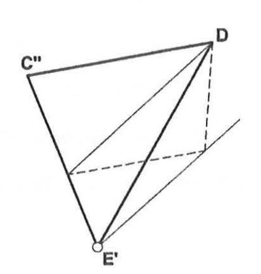
Fig. 7

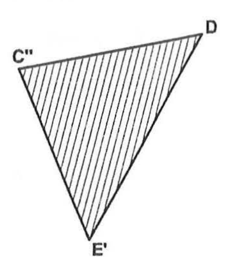


polígonos equivalentes









10
El triángulo

§ 1.10.1 **Elementos y determinación del triángulo.** El triángulo, como polígono más sencillo (con n = 3, el n-vértice coincide con el *n-látero*), necesita tres datos independientes para su determinación [§ 1.9.3]. Así, viene definido por sus tres lados pero no por sus tres ángulos, al no ser éstos tres datos independientes. [1] [*fig. 1*]

Se denomina *mediana* de un lado la recta que une el punto medio de ese lado con el vértice opuesto. Cabe definir la mediana, en virtud del teorema de Thales, como lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos paralelos al lado correspondiente y que se apoyan en los otros dos lados del triángulo. Una paralela cualquiera a uno de los lados del triángulo corta a los otros dos formando un triángulo semejante. [*fig. 2*]

Si en un triángulo se transporta uno de sus ángulos sobre su lado opuesto se obtiene un triángulo semejante al dado, cuyo gnomon [§ 1.8.1] es, en consecuencia, el triángulo restante. [*fig. 3*]

Se denomina *altura* de un triángulo, tomado un lado como base, a la distancia de este lado a su vértice opuesto; se materializa, por tanto, en el segmento perpendicular al lado desde el vértice [*fig. 4*]. Todos los triángulos que tengan igual altura para ese mismo lado base son *equivalentes*, esto es, tienen la misma área (que es inmediato referir a la de un rectángulo o un cuadrado equivalente *-cuadratura del triángulo-*).

§ 1.10.2 **Clasificación.** Los triángulos se clasifican

- por sus lados [*fig. 5*]:

  escaleno : [2] los tres lados distintos (y, recíprocamente, los tres ángulos distintos)

  isósceles : [3] dos lados iguales (y, recíprocamente, dos ángulos iguales); el lado desigual se llama *base* (la mediatriz de la base coincide con la altura, la mediana y la bisectriz de su ángulo opuesto).

  equilátero : los tres lados iguales (y, recíprocamente, los tres ángulos de 60º); es el triángulo regular (la mediatriz de cada lado coincide con la altura, la mediana y la bisectriz de su ángulo opuesto).

- por sus ángulos [*fig. 6*]; la suma de los lados del triángulo -que es siempre un polígono convexo [§ 1.9.3]- es el ángulo llano (180º), en consecuencia el triángulo pueden ser:

  acutángulo : los tres ángulos agudos

  rectángulo : un ángulo recto (y por consiguiente los otros dos, agudos -complementarios entre sí-); los lados que forman el ángulo recto son los *catetos* [4] y el opuesto, la *hipotenusa* [5]

  obtusángulo : un ángulo obtuso (y por consiguiente los otros dos, agudos).

  Casos notables, entre los triángulos rectángulos, son el *cartabón* (ángulos agudos de 30º y 60 º) y la *escuadra* (el triángulo rectángulo isósceles), las fundamentales plantillas para el dibujo; también el conocido como *triángulo de Pitágoras* o *triángulo egipcio*, que tiene sus lados en la proporción 3, 4 y 5 (que constituye, desde la antigüedad, un procedimiento sencillo -muy práctico en la agrimensura- para obtener el ángulo recto a partir de tres módulos enteros sucesivos). [6]

---

[1] En [§ 1.12] se dan distintas construcciones elementales del triángulo.

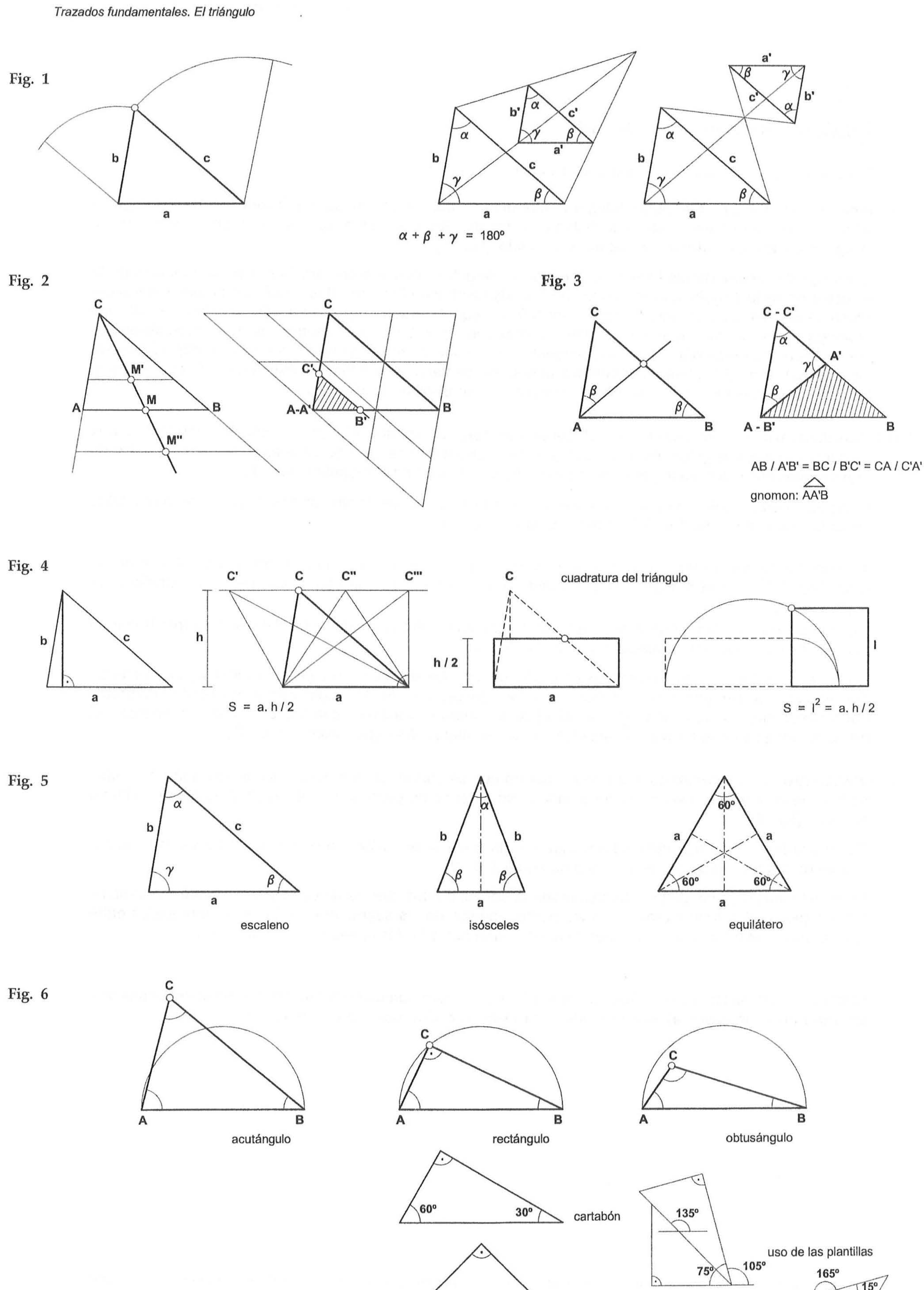
[2] Del griego σχαληνοζ (oblicuo).

[3] Del griego ισοζ (igual) y σχελοζ (pierna).

[4] Del griego χαδετοζ (perpendicular).

[5] Del griego υποτεινουσα (tender por debajo).

[6] Es el primero en la serie de los triángulos rectángulos *diofánticos*, que tienen sus lados formados por números enteros.


Fig. 1
b
c
a
α
γ
β
b'
c'
a'
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$
Fig. 2
C
M'
M
M''
A
B
C'
A-A'
B'
Fig. 3
C - C'
A'
A - B'
AB / A'B' = BC / B'C' = CA / C'A'
gnomon: AA'B
Fig. 4
C'
C''
C'''
h
h / 2
S = a. h / 2
cuadratura del triángulo
l
S = l² = a. h / 2
Fig. 5
escaleno
isósceles
equilátero
60°
Fig. 6
acutángulo
rectángulo
obtusángulo
60°
30°
cartabón
45°
escuadra
(rectángulo isósceles)
3
4
5
triángulo de Pitágoras o egipcio
135°
75°
105°
uso de las plantillas
165°
15°
120°
150°

11
Puntos notables del triángulo

Para un triángulo cualquiera se definen los siguientes puntos.

§ 1.11.1 **Incentro**. El *incentro* es el punto interior al triángulo en que se cortan las tres bisectrices de los ángulos interiores; es, por consiguiente, equidistante de los tres lados y, por tanto, centro de una circunferencia tangente a ellos: *circunferencia inscrita* al triángulo. [*fig. 1*]

Si en vez de considerar las bisectrices de los tres ángulos interiores contemplamos la intersección de la bisectriz de cada ángulo interior con las de los adyacentes de los otros dos ángulos (ángulos exteriores) obtenemos tres puntos exteriores -*exincentros*- equidistantes, cada uno, de un lado y de las prolongaciones de los otros dos; estos puntos son, por tanto, los centros de tres circunferencias -*circunferencias exinscritas*- que son tangentes, cada una de ellas, a un lado y a las prolongaciones de los otros dos [*fig. 2*]. Obsérvese que el triángulo cuyos vértices son los tres exincentros (y cuyos lados, las tres bisectrices exteriores del triángulo inicial) es siempre un triángulo acutángulo.

§ 1.11.2 **Circuncentro.** El *circuncentro* es el punto -no necesariamente interior- en que se cortan las tres mediatrices de los ángulos; es, por consiguiente, equidistante de los tres vértices y, por tanto, centro de una circunferencia que pasa por ellos: *circunferencia circunscrita* al triángulo. [*fig. 3*]

Una propiedad notable de esta circunferencia es que contiene los puntos de intersección de la mediatriz de cada lado con la bisectriz del ángulo opuesto. [1] [*fig. 4*]

§ 1.11.3 **Ortocentro.** El *ortocentro* es el punto -no necesariamente interior- en que se cortan las tres alturas de los lados [*fig. 5*].[2] (Si el triángulo es rectángulo el ortocentro coincide con el vértice correspondiente al ángulo recto).

Obsérvese, por otro lado, que el ortocentro de un triángulo será el circuncentro del que se forme trazando por los vértices de aquél paralelas a sus lados). [*fig. 6*]

Obsérvese también que las bisectrices interiores de un triángulo cualquiera [*fig. 2*] constituyen las alturas del triángulo acutángulo cuyos vértices son los exincentros del triángulo inicial; de modo recíproco, enunciamos que en todo triángulo acutángulo las alturas coinciden con las bisectrices interiores del triángulo que podemos formar con las pies de dichas alturas -*triángulo órtico* -. [*fig. 7*]

§ 1.11.4 **Baricentro.** El *baricentro* es el punto interior en que se cortan las tres medianas de los lados. Se sitúa, definiendo el *centro de gravedad* del triángulo, en el tercio de cada una de las medianas más próximo a su base. [*fig. 8*]

Por otro lado, en todo triángulo el baricentro se alinea -*recta de Euler*- con el circuncentro y el ortocentro, quedando a doble distancia de éste que de aquél. [*fig. 9*]

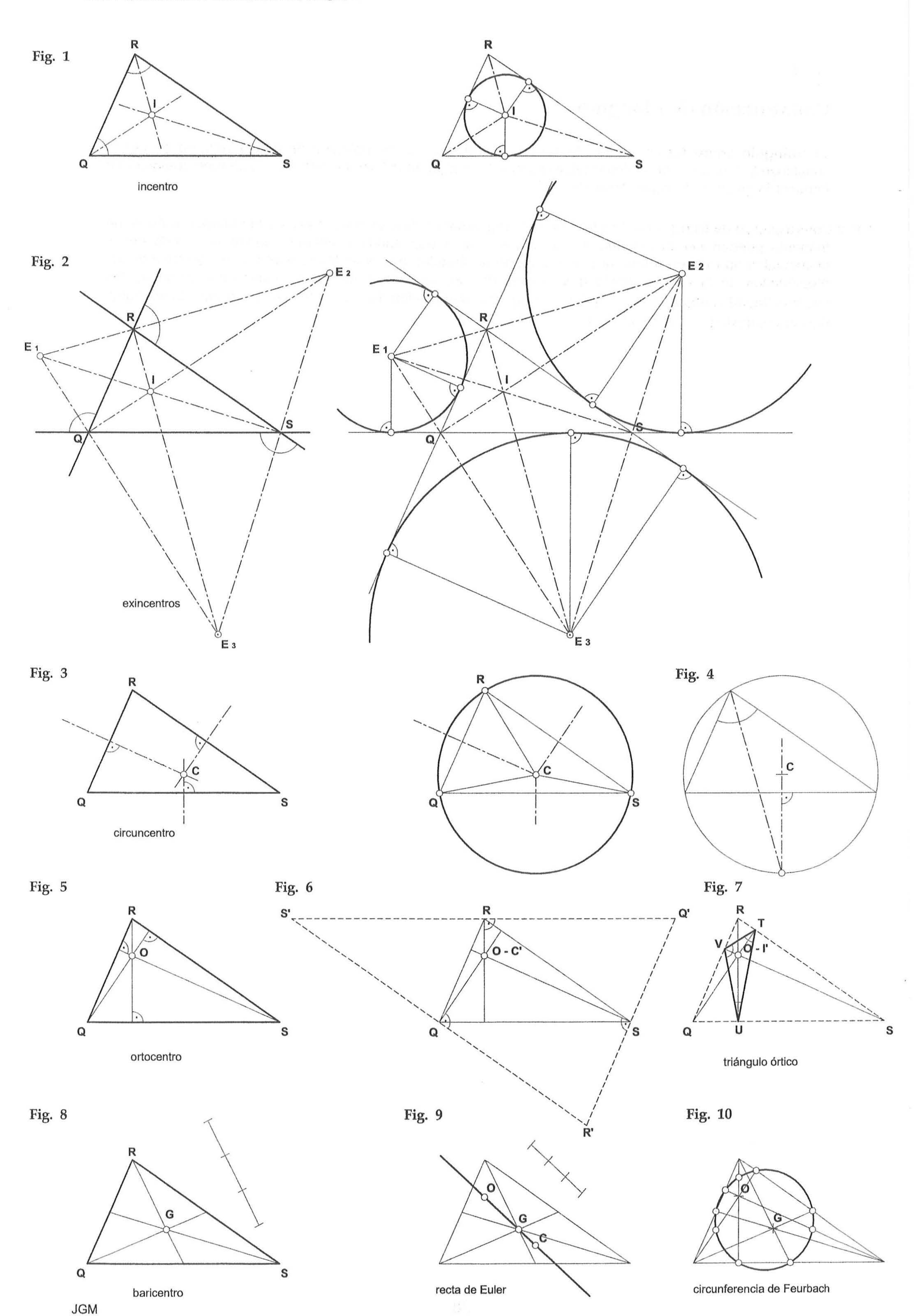
En todo triángulo, la circunferencia determinada por los puntos medios de cada lado es incidente también con los pies de las tres alturas y con los puntos medios de los segmentos de éstas comprendidos entre cada vértice y el ortocentro -*circunferencia de Feuerbach* o *de los nueve puntos*-. [*fig. 10*]

El triángulo equilátero, como triángulo regular [§ 1.15.1], tiene un único centro (centro de la circunferencia inscrita y de la circunscrita), que coincide, así mismo, con el ortocentro y el baricentro.

---

[1] Otra propiedad : si desde un punto cualquiera de esta circunferencia, distinto de los vértices del triángulo, se trazan las tres perpendiculares a los lados, los pies de éstas se sitúan en línea recta -*recta de Simson*-.

[2] En el estudio de la axonometría ortogonal y de la perspectiva de cuadro inclinado este punto resulta de particular importancia.

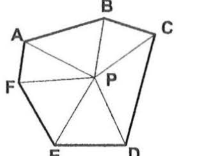

Fig. 1
R
I
Q
S
incentro
R
I
Q
S
Fig. 2
E 2
R
E 1
I
Q
S
exincentros
E 3
E 2
R
E 1
I
Q
S
E 3
Fig. 3
R
C
Q
S
circuncentro
R
C
Q
S
Fig. 4
C
Fig. 5
R
O
Q
S
ortocentro
Fig. 6
S'
R
Q'
O - C'
Q
S
R'
Fig. 7
R
T
V
O - I'
Q
U
S
triángulo órtico
Fig. 8
R
G
Q
S
baricentro
Fig. 9
O
G
C
recta de Euler
Fig. 10
O
G
circunferencia de Feurbach
JGM

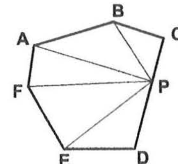
12
Construcción de triángulos

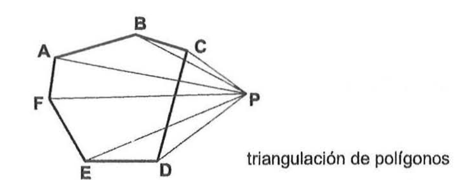
§ 1.12.1 **El triángulo como forma rígida elemental.** El triángulo, como polígono de menor número de lados, constituye la *forma rígida* -indeformable- esencial; de aquí, la utilidad de reducir un polígono cualquiera a formas triangulares -*triangulación*-. [*fig. 1*]

§ 1.12.2 **Construcción de triángulos.** Los tres datos independientes que se necesitan para la determinación de un triángulo pueden ser la longitud de los lados, uno o dos ángulos, alturas, medianas... Los casos elementales no requieren más que el transporte de ángulos o segmentos y, a veces, el uso de algunas propiedades de la circunferencia que circunscribe al triángulo: arco capaz, lugar geométrico de las cuerdas trazadas desde un punto [§ 1.4.2] [*fig. 8*], intersección de la bisectriz de un ángulo y la mediatriz del lado opuesto [§ 1.11.1] [*fig. 9*]...

Fig. 1

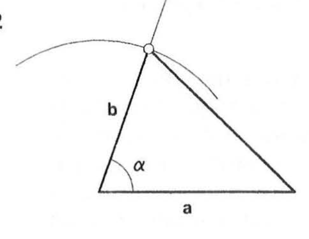






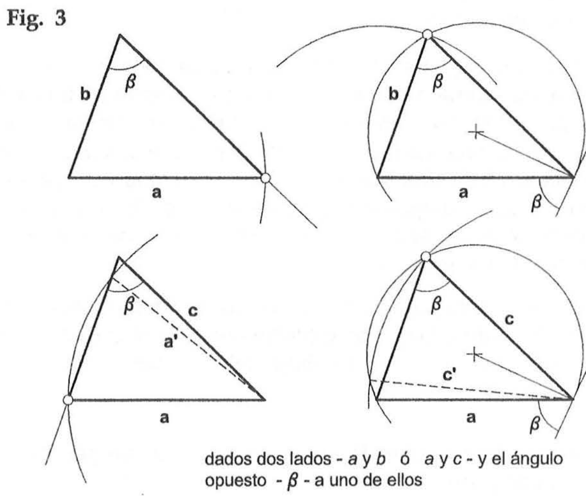
triangulación de polígonos

Fig. 2



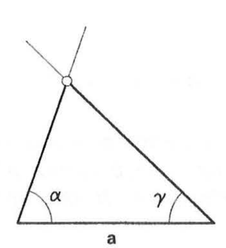
dados dos lados - *a* y *b* - y el ángulo comprendido - α -

Fig. 3



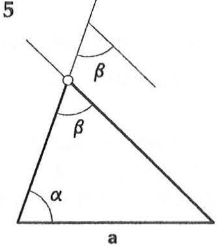
dados dos lados - *a* y *b* ó *a* y *c* - y el ángulo opuesto - β - a uno de ellos

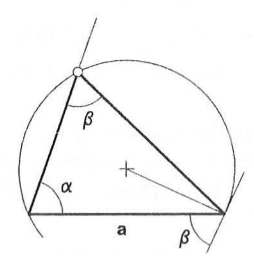
Fig. 4



dados un lado - *a* - y sus dos ángulos contiguos - α y γ -

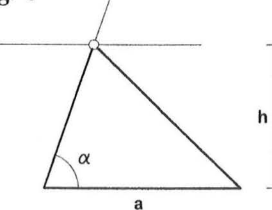
Fig. 5



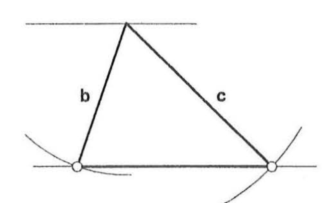


dados un lado - *a* -, su ángulo opuesto - β - y otro contiguo - α -

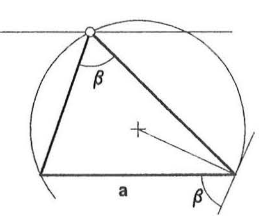
Fig. 6



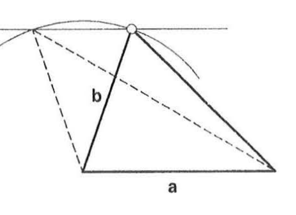
dados un lado - *a* -, un ángulo contiguo - α - y la altura correspondiente - *h* -



dados dos lados - *b* y *c* - y la altura - *h* - correspondiente al otro

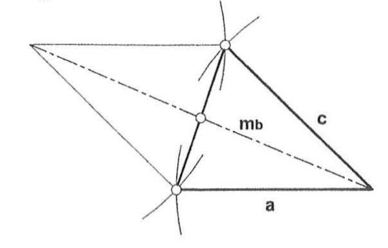


dados un lado - *a* -, la altura correspondiente - *h* - y el ángulo opuesto - β -



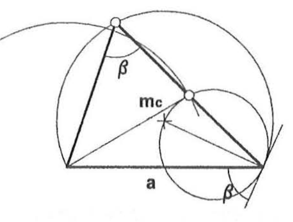
dados dos lados - *a* y *b* - y la altura correspondiernte a uno de ellos - *h* -

Fig. 7



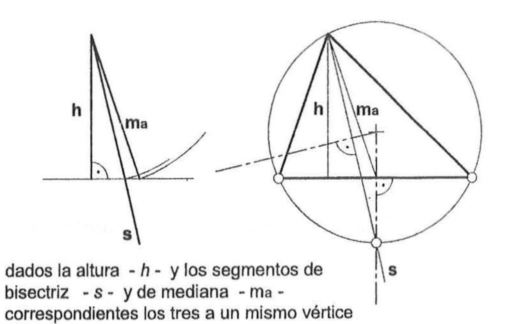
dados dos lados - *a* y *c* - y el segmento de mediana - m_b - correspondiente al otro

Fig. 8



dados un lado - *a* -, su ángulo opuesto - β - y el segmento de mediana - m_c - correspondiente a otro lado

Fig. 9



dados la altura - *h* - y los segmentos de bisectriz - *s* - y de mediana - m_a - correspondientes los tres a un mismo vértice

JGM

13
Cuadriláteros convexos

§ 1.13.1 **El cuadrilátero**

El cuadrilátero requiere 5 condiciones independientes para su determinación [§ 1.9.3]; por ejemplo, frecuentemente, los cuatro lados y una diagonal -*triangulación*-: observemos que, dependiendo de que llevemos o no los lados en el mismo semiplano que define la diagonal, podemos obtener respectivamente el polígono cóncavo o el convexo. [*fig. 1*]

La suma de los ángulos de todo cuadrilátero convexo es de 360º [§ 1.9.2]: se puede descomponer en dos triángulos -camino usual para su construcción-. En el caso particular de que dos ángulos opuestos sean suplementarios, los otros dos lo serán también, y el cuadrilátero -como deducimos de la construcción de arco capaz [§ 1.4.1]- resulta *inscriptible* en una circunferencia; [1] corolario de ello es que un cuadrilátero con dos ángulos rectos opuestos es inscriptible en la circunferencia cuyo centro es el punto medio de la diagonal que une los otros dos vértices. Correlativamente, la condición para que un cuadrilátero convexo sea *circunscriptible* en una circunferencia es que sean iguales las sumas de pares de lados opuestos. [*fig. 2*]

En todo cuadrilátero, cóncavo o convexo, las diagonales son paralelas a las rectas que unen los puntos medios de los lados; lo que es equivalente a decir que en todo cuadrilátero los puntos medios de los lados -o los puntos medios de las diagonales y los puntos medios de dos lados opuestos- definen un paralelogramo. [*fig. 3*]

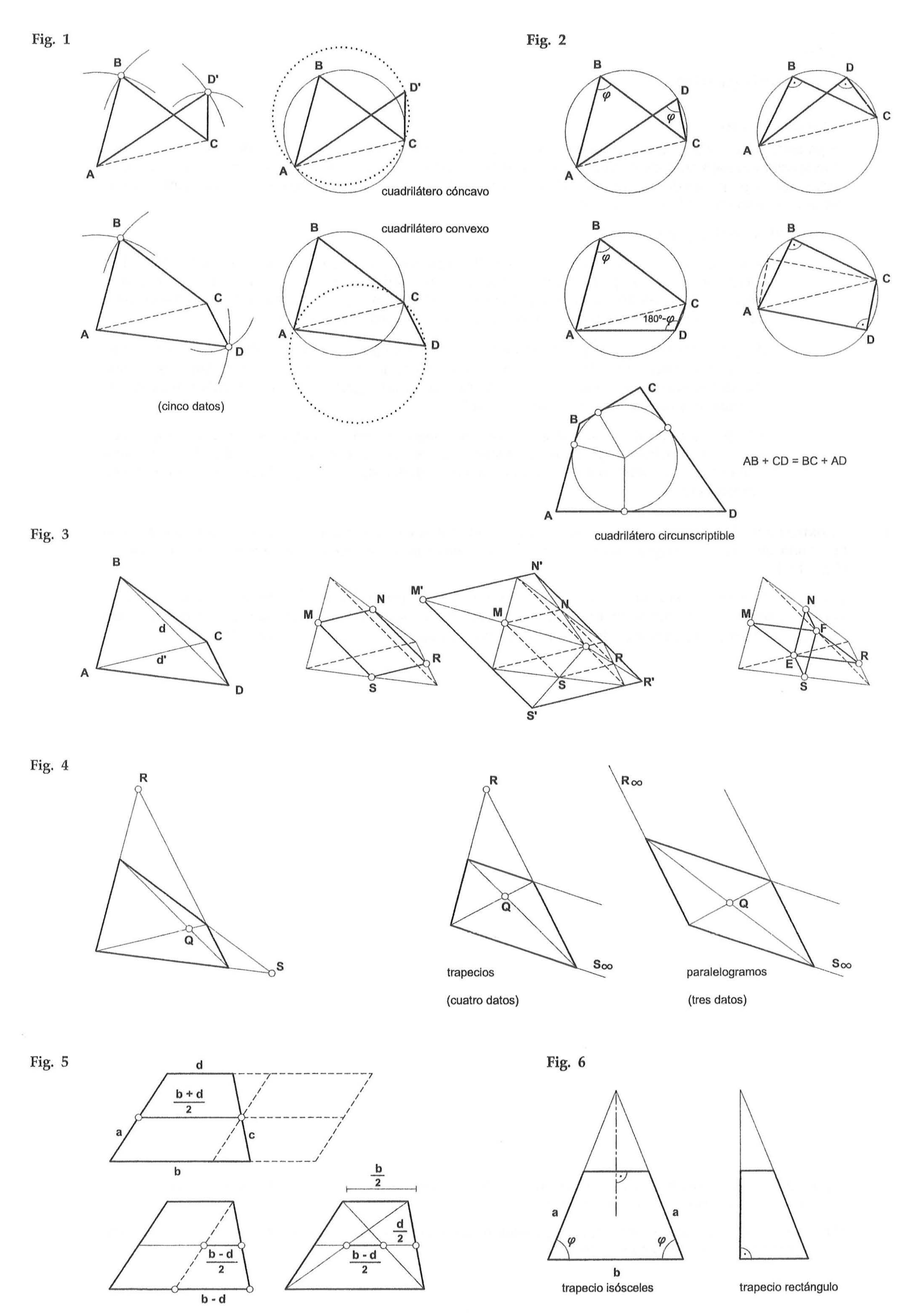
§ 1.13.2 **Clasificación de los cuadriláteros.** La clasificación general de los cuadriláteros convexos viene dada por la condición de paralelismo entre sus lados: [*fig. 4*]

- *trapezoide* : -caso general de cuadrilátero-, sin lados paralelos (5 condiciones para su determinación)
- *trapecio* : dos lados paralelos (4 condiciones para su determinación)
- *paralelogramo* : lados opuestos paralelos dos a dos (3 condiciones para su determinación).

§ 1.13.3 **El trapecio.** Los dos lados paralelos del trapecio son las *bases*. La *base media* -semisuma de las bases- viene dada por el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos (paralelo, a su vez, a las bases); el segmento que limitan las diagonales en la base media es la semidiferencia de las bases. [*fig. 5*]

Casos particulares: *trapecio isósceles*, si ambas bases tienen la misma mediatriz (eje de simetría); *trapecio rectángulo*, si uno de los lados es perpendicular a las bases. [*fig. 6*]

[1] Naturalmente, es la circunferencia circunscrita a los dos triángulos que se forman.


Fig. 1
B
D'
C
A
cuadrilátero cóncavo
cuadrilátero convexo
D
(cinco datos)
Fig. 2
φ
180º-φ
AB + CD = BC + AD
cuadrilátero circunscriptible
Fig. 3
d
d'
M
N
R
S
M'
N'
R'
S'
E
F
Fig. 4
R
Q
S
R∞
S∞
trapecios
(cuatro datos)
paralelogramos
(tres datos)
Fig. 5
d
b + d
2
a
c
b
b - d
2
b - d
b
2
d
2
Fig. 6
a
φ
b
trapecio isósceles
trapecio rectángulo

14
El paralelogramo

§ 1.14.1 **El paralelogramo**

El paralelogramo, como cuadrilátero de lados paralelos dos a dos, [1] implica dos de las 5 condiciones independientes para su construcción; bastan por tanto 3 de ellas. Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio (centro de simetría del paralelogramo). El caso general de paralelogramo se denomina también *romboide.* [2] [*fig. 1*]

Casos particulares: [*fig.* 2]

- *rombo* : si los cuatro lados son iguales (bastan dos condiciones para su construcción). Las diagonales son perpendiculares -cada una es mediatriz de la otra- y ejes de simetría, y dividen al rombo en cuatro triángulos rectángulos iguales, de manera que se puede inscribir una circunferencia cuyo radio es la altura correspondiente a sus hipotenusas.
- *rectángulo* : si los cuatro ángulos son iguales y, por consiguiente, rectos (bastan dos condiciones para su construcción). Por tener ángulos rectos opuestos [§ 1.13.1] es inscriptible en una circunferencia cuyo centro es el punto medio de las diagonales; las *paralelas medias* son mediatrices de los lados (ejes de simetría).
- *cuadrado* : si tanto los cuatro lados como los cuatro ángulos son iguales (basta una condición para su construcción). Como polígono regular, es inscriptible y circunscriptible en una circunferencia; tiene, participando de las propiedades del rombo y del rectángulo, cuatro ejes de simetría.

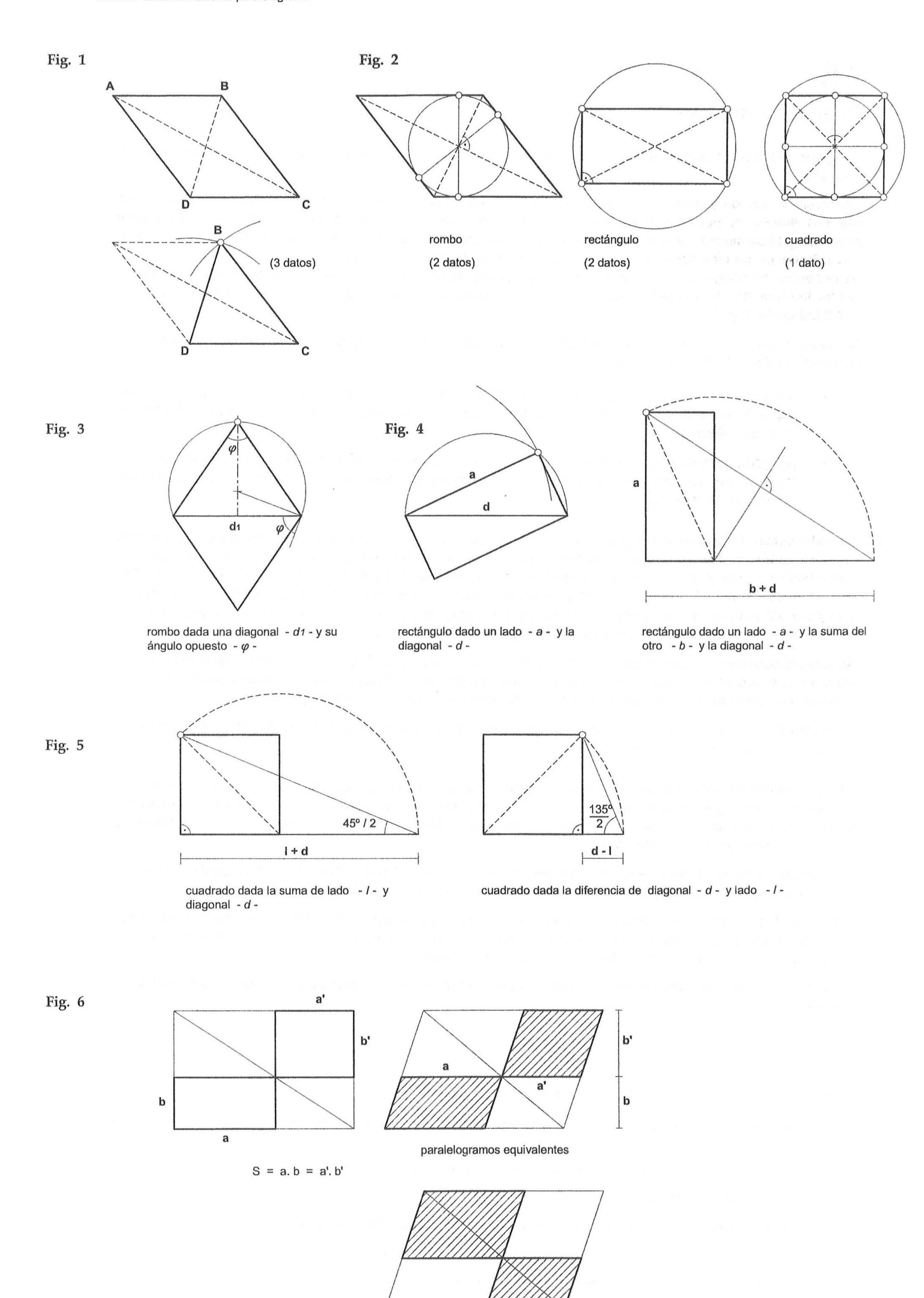
§ 1.14.2 **Construcción de paralelogramos.** Los datos necesarios para su construcción pueden ser directos -un lado, una diagonal, un ángulo- o indirectos -el segmento suma o diferencia de la diagonal y un lado...-. [*figs. 3-5*].

Los paralelogramos semejantes comparten la misma dirección diagonal. Por otro lado, como el paralelogramo se descompone en dos triángulos iguales, su superficie es el doble de la base por su *altura* (de aquí, es facil ver la correspondencia entre paralelogramos equivalentes [§ 1.9.4]). [*fig. 6*]

---

[1] Esta condición equivale a la de que los dos pares de lados opuestos sean iguales; o, correlativamente, a la de que los dos pares de ángulos opuestos sean iguales.

[2] No obstante, algunos autores -entre ellos Rey Pastor- prefieren reservar esta denominación para el cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales.


Fig. 1
A
B
D
C
B
(3 datos)
D
C
Fig. 2
rombo
(2 datos)
rectángulo
(2 datos)
cuadrado
(1 dato)
Fig. 3
φ
d1
φ
rombo dada una diagonal - d1 - y su ángulo opuesto - φ -
Fig. 4
a
d
rectángulo dado un lado - a - y la diagonal - d -
a
b + d
rectángulo dado un lado - a - y la suma del otro - b - y la diagonal - d -
Fig. 5
45º / 2
l + d
cuadrado dada la suma de lado - l - y diagonal - d -
135º
2
d - l
cuadrado dada la diferencia de diagonal - d - y lado - l -
Fig. 6
a'
b'
b
a
S = a. b = a'. b'
a
a'
b'
b
paralelogramos equivalentes
paralelogramos semejantes

15

Polígonos regulares

§ 1.15.1 **Polígono regular.** *Polígono regular* es el que cumple la doble condición de igualdad entre sus lados y sus ángulos.

La construcción de polígonos regulares es equivalente a la cuestión de dividir la circunferencia en un número entero de partes iguales (ejercicio que, como veremos, sólo en casos particulares se puede resolver gráficamente): al unir dos divisiones consecutivas obtenemos un polígono regular *inscrito* a la circunferencia -se dice de ésta que es *circunscrita* al polígono-. El centro de la circunferencia circunscrita es el *centro del polígono*, punto en que se cortan todas las bisectrices y todas las mediatrices y, por tanto, centro también de una circunferencia tangente a los lados -circunferencia *inscrita*-, cuyo radio es *apotema* [1] del polígono. [*fig. 1*]

Si sólo cumple una de las dos condiciones de regularidad, y la otra se ajusta a determinados requisitos, el polígono se denomina *semirregular* : [*fig. 2*]

- polígono semirregular *equiángulo* es el que tiene todos sus ángulos iguales y en número par, de manera que sus lados alternos son iguales (caso, por ejemplo, del rectángulo); es inscriptible en una circunferencia
- polígono semirregular *equilátero* es el que tiene todos sus lados iguales y en número par, de manera que sus ángulos alternos son iguales (caso, por ejemplo, del rombo); es circunscriptible en una circunferencia.

§ 1.15.2 **Construcción de polígonos regulares.** La división de la circunferencia en partes iguales sólo se puede resolver gráficamente en casos determinados, enunciados por Gauss. Así sabemos que, con los instrumentos euclidianos, es posible dividir la circunferencia en 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 17... partes iguales, esto es, dibujar los respectivos polígonos regulares: triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono, octógono, decágono, dodecágono, pentadecágono, heptadecágono... [§ 1.16]. En cualquier caso, es siempre posible la división por mediatrices a partir de un polígono dado. [2] [*fig. 3*]

No hay procedimiento racional para construir polígonos regulares de 7, 9, 11, 13... lados; así y todo, es útil conocer el procedimiento aproximado para dibujar polígonos «regulares» de cualquier número de lados (división aproximada de la circunferencia en un número cualquiera de partes). [*fig. 5*]

El heptágono regular se puede dibujar con gran precisión mediante una sencilla regla empírica -*construcción de Durero* -. [*fig. 4*]

§ 1.15.3 **Polígonos estrellados.** La división de la circunferencia en partes iguales nos lleva a otra generación de polígonos: si en lugar de unir cada división con la siguiente lo hacemos con una alternancia constante (cada 2, 3, 4... divisiones) podemos obtener -si se cierra la línea- un nuevo polígono, que no es convexo y que se denomina *polígono estrellado.*

La alternancia de los puntos de división se denomina *paso* (paso 1 nos daría el polígono regular convexo). La línea poligonal, en correspondencia con el paso, se cerrará a la 2ª, 3ª, 4ª... vuelta.

Dada una división de la circunferencia en *n* partes iguales se pueden obtener tantos polígonos estrellados diferentes entre sí, de *n* lados, como números primos con *n* sean menores que $n / 2$. Tales números nos indican, a su vez, el paso y la vuelta en que el polígono cierra. [*fig. 6*]

Un polígono estrellado define en su interior, como intersección de sus lados, el homónimo polígono convexo.

---

[1] Del griego *απο* (desde) y *τιθημι* (colocar).

[2] Gauss demostró que con regla y compás la circunferencia se puede dividir en un número *n* de partes iguales en tres casos:

- $n = 2^m$, siendo *m* un número natural (obtención por mediatrices)
- *n* es un número primo tal que $n = 2^p + 1$
- *n* es un número obtenido como producto de los de los dos casos anteriores, esto es

$$n = 2^m (2^p + 1) (2^q + 1) (2^r + 1)...$$

siempre que cada uno de los factores primos sean distintos.

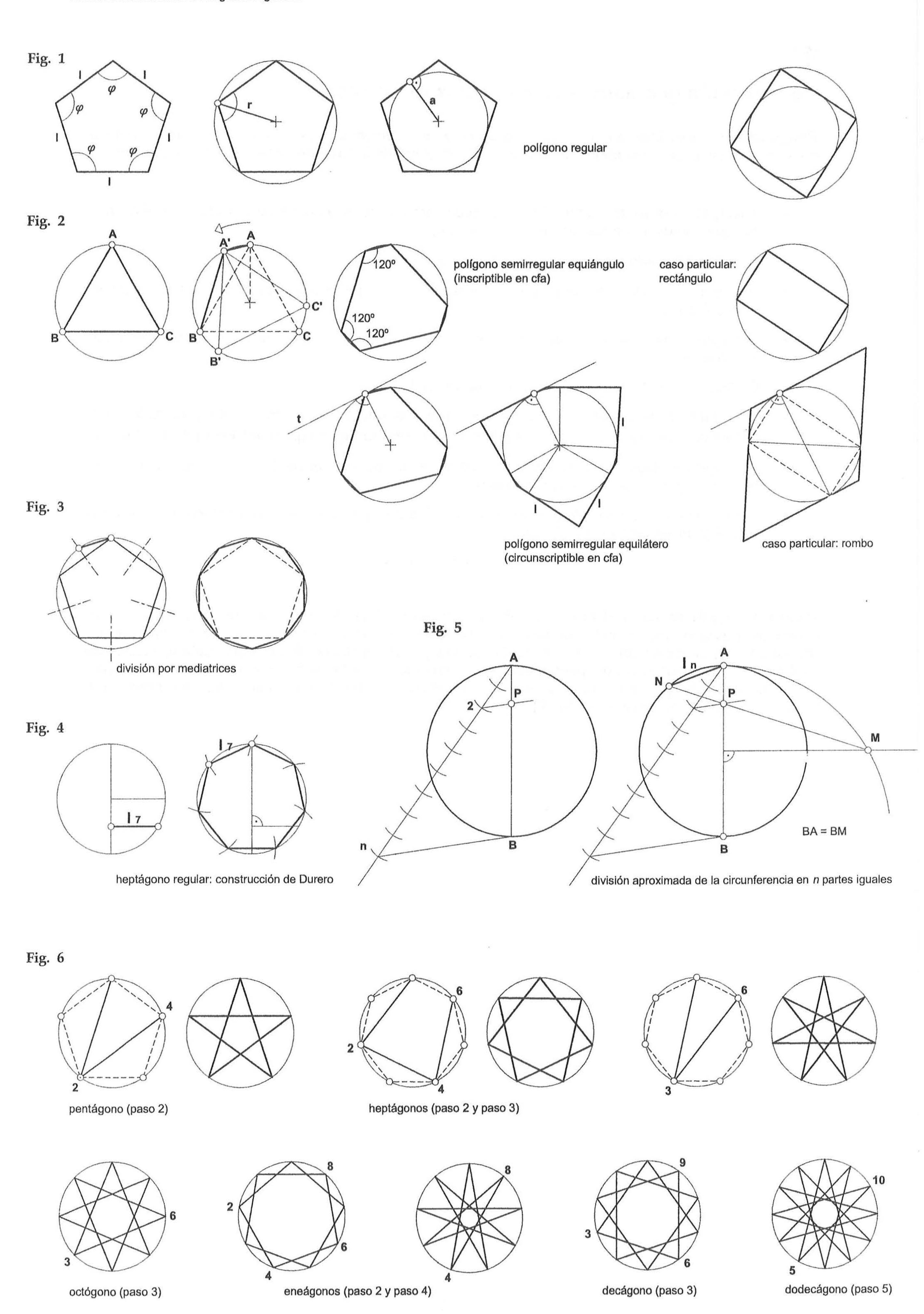


Fig. 1
l
φ
r
a
polígono regular
Fig. 2
A
A'
B
C
C'
B'
120º
polígono semirregular equiángulo
(inscriptible en cfa)
caso particular:
rectángulo
t
polígono semirregular equilátero
(circunscriptible en cfa)
caso particular: rombo
Fig. 3
división por mediatrices
Fig. 4
l_7
heptágono regular: construcción de Durero
Fig. 5
P
2
n
N
l_n
M
BA = BM
división aproximada de la circunferencia en *n* partes iguales
Fig. 6
2
3
4
5
6
8
9
10
pentágono (paso 2)
heptágonos (paso 2 y paso 3)
octógono (paso 3)
eneágonos (paso 2 y paso 4)
decágono (paso 3)
dodecágono (paso 5)

16
Construcción geométrica de polígonos regulares

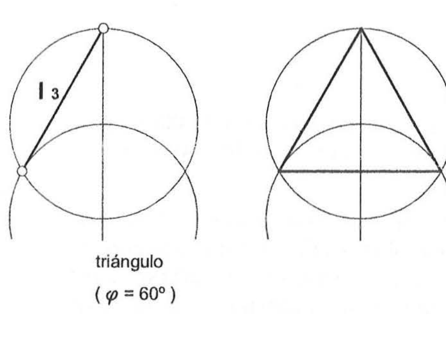
§ 1.16.1 **Polígonos regulares inscritos a una circunferencia.** El procedimiento general es, como hemos visto, la división de la circunferencia en partes iguales; esto es, partir de la circunferencia circunscrita al polígono. [*fig. 1*]

- Triángulo equilátero: tripartición de la circunferencia (con arco de igual radio y centro en el extremo del diámetro que determina un vértice)
- Cuadrado: trazado de dos diámetros perpendiculares
- Pentágono: atendiendo a la proporción áurea [§ 1.8.4] que existe entre el lado y la diagonal de este polígono
- Hexágono: dada la propiedad de que su lado coincide con el radio de la circunferencia circunscrita
- Octógono: a partir del cuadrado (por mediatrices de sus lados)
- Decágono: bien atendiendo a la proporción áurea que existe entre el lado y el radio de la circunferencia circunscrita [§ 1.8.4], bien a partir del pentágono (por mediatrices de sus lados)
- Dodecágono: bien por *tripartición del cuadrante* de circunferencia [§ 1.1.9], bien a partir del hexágono (por mediatrices de sus lados)
- Pentadecágono: a partir de la diferencia entre los arcos correspondientes al lado del hexágono (radio) y del decágono, puesto que:

$$1/6 - 1/10 = 1/15$$

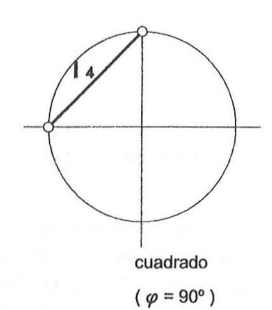
§ 1.16.2 **Polígonos regulares dado el lado.** En determinados casos hay sencillas construcciones para dibujar polígonos regulares dado el lado (sin necesidad de tener que obtener el inscrito a una circunferencia y dibujar por proporcionalidad). Los casos del triángulo equilátero y del cuadrado son directa aplicación de su definición; la construcción del pentágono regular, conocido el lado, se basa en la relación áurea entre éste y la diagonal [*fig. 2*]. Por otro lado, es interesante observar las relaciones existentes entre polígonos regulares de igual lado [*fig. 3*].

Fig. 1



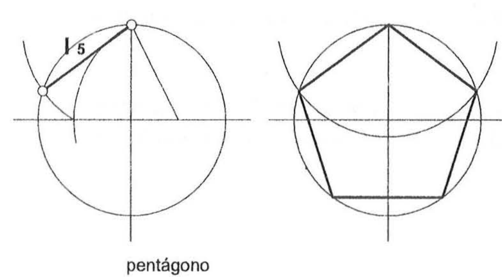
triángulo

(φ = 60º)



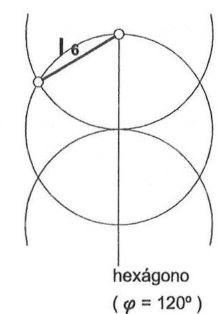
cuadrado

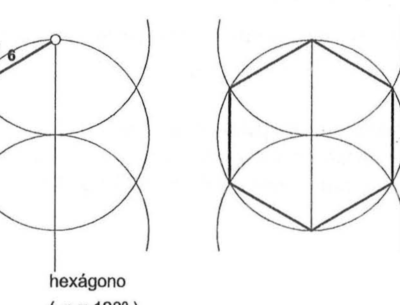
(φ = 90º)



pentágono

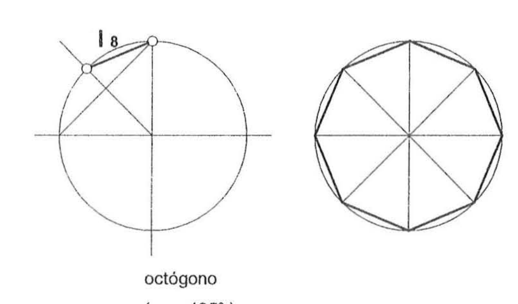
(φ = 108º)





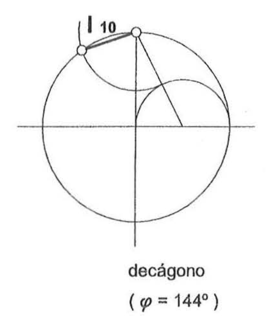
hexágono

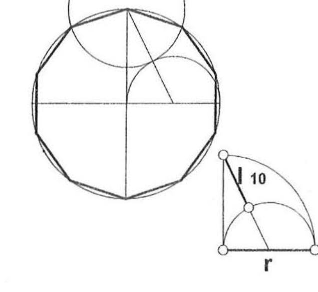
(φ = 120º)



octógono

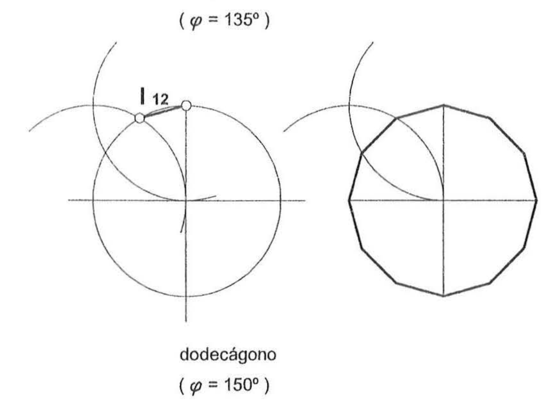
(φ = 135º)





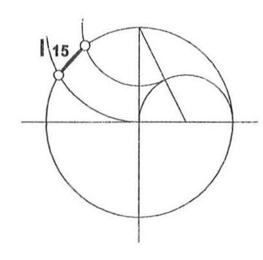
decágono

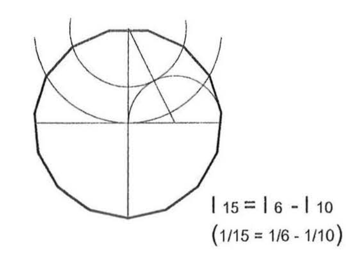
(φ = 144º)



dodecágono

(φ = 150º)

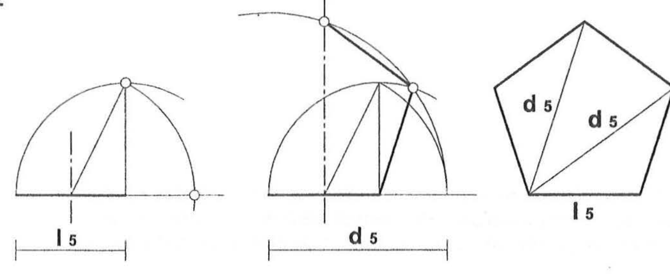




pentadecágono

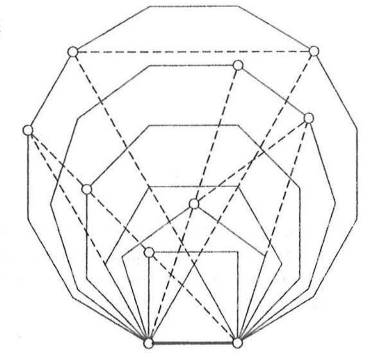
(φ = 156º)

Fig. 2



construcción del pentágono regular dado el lado

Fig. 3



polígonos regulares construidos sobre el mismo lado y sus relaciones

17

Redes poligonales

§ 1.17.1 **Particiones regulares del plano.** La partición del plano mediante polígonos regulares que lo compacten -esto es, sin dejar área alguna entre ellos- se puede lograr a base de un solo tipo de polígono -*retículas elementales*- o de varios.

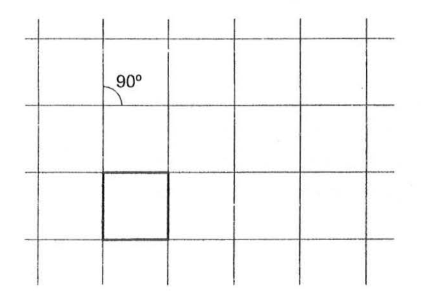
Condición para que un solo polígono regular pueda compactar el plano es que su ángulo sea divisor de 360 º ; en consecuencia sólo hay tres tipos de particiones o redes elementales, estrictamente regulares: la del cuadrado (90 º), la del triángulo (60 º) y la del hexágono (120 º) -ésta puede considerarse como directa derivación de la del triángulo-.[1] A partir de estas tres particiones básicas pueden obtenerse otras redes de interés. [*fig. 1*]

Son también destacables las redes *equiláteras* que se pueden formar con distintos tipos de polígonos regulares de igual lado. [*figs. 2 y 3*]

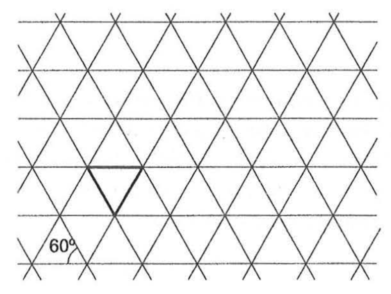
§ 1.17.2 **Particiones no regulares del plano.** El plano se puede compactar, partiendo o no de las retículas básicas, mediante polígonos irregulares o regulares e irregulares [*fig. 4*]; estas *particiones no regulares* del plano, pueden ser equiláteras [*fig. 1*].

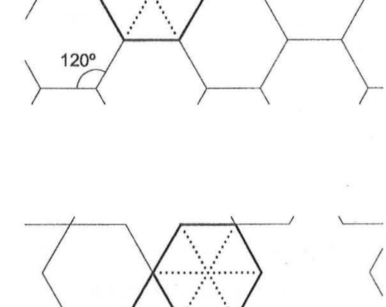
[1] La red del hexágono que se observa con frecuencia en el mundo orgánico se explica como compactación -eliminando, por expansión, los intersticios- de una red de formas circulares (las formas *redondas* -homogéneas y que maximizan la superficie o el volumen que encierran- se producen naturalmente en el crecimiento de dentro hacia fuera).

Fig. 1

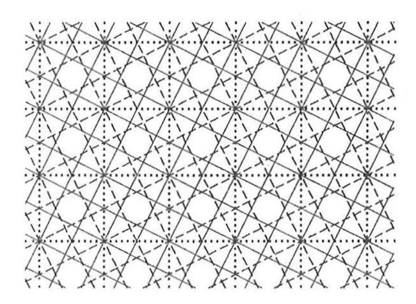


retícula básica del cuadrado

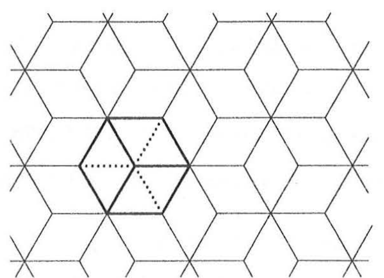




retículas básicas del triángulo y hexágono



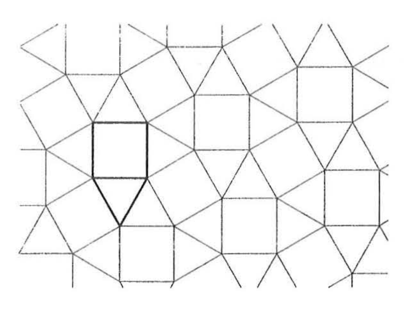
inscripción del triángulo isósceles de igual base que altura en la retícula del cuadrado (dos nuevas cuadrículas giradas)



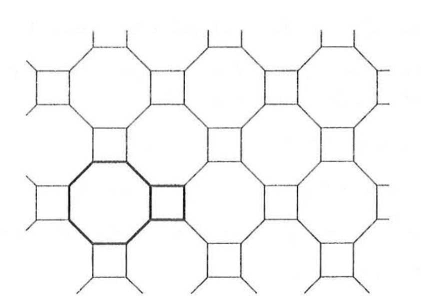
partición equilátera -no regular- en rombos, superpuesta a la retícula del triángulo

partición equilátera en hexágonos y estrellas de seis puntas, superpuesta a la retícula del triángulo

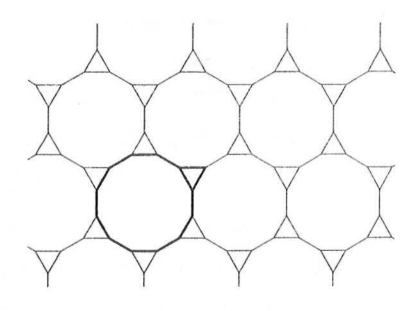
Fig. 2



partición regular en triángulos y cuadrados

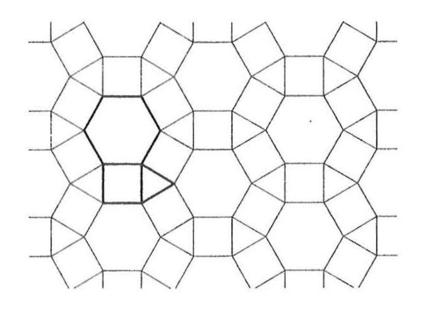


partición regular en cuadrados y octógonos

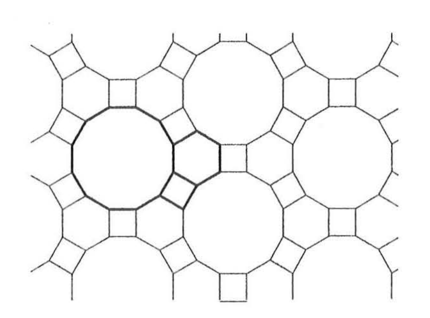


partición regular en triángulos y dodecágonos

Fig. 3

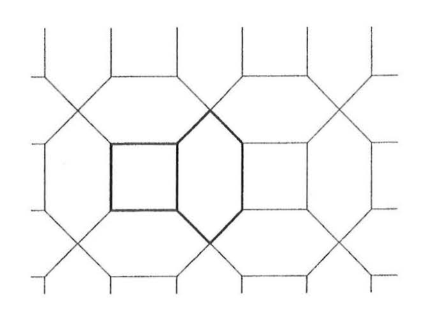


partición regular en triángulos, cuadrados y hexágonos



partición regular en cuadrados, hexágonos y dodecágonos

Fig. 4



partición no regular en cuadrados y hexágonos irregulares
(interpretable como proyección del poliedro de *lord Kelvin*)

Bibliografía

Recoge esta *mínima* bibliografía textos de carácter básico, que abrazan -en mayor o menor medida, con distintos puntos de vista- el campo de nuestro trabajo. Son textos suficientemente sencillos y didácticos (por lo general con una más que correcta exposición gráfica), escritos en español o traducidos, fáciles de localizar en bibliotecas y aun, en bastantes casos, de adquirir.

ÁLVAREZ, Jesús: *Geometría descriptiva de líneas y superficies*, Madrid, s.e., 1974.
- *Geometría descriptiva de líneas y superficies (teoría y práctica)*, Madrid, s.e., 1991

ENRIQUES, F.: *Lecciones de Geometría Descriptiva*, Madrid, Rialto, 1943,

GHYKA, Matila C.: *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*, Barcelona, Poseidón, 1977.
- *El número de oro*, (2 vols.), Barcelona, Poseidón, 1978.

IZQUIERDO ASENSI, Fernando: *Geometría Descriptiva*, Madrid, Dossat, 1990.
- *Geometría Descriptiva Superior y Aplicada*, Madrid, Dossat, 1980.

PUIG ADAM, Pedro: *Curso de Geometría Métrica*. t. I: *Fundamentos*; t. II: *Complementos*, Madrid, 1958.

RABASA DÍAZ, Enrique: *Proyección y representación. Conceptos intuitivos*, Madrid, Instituto Juan de Herrera, 2000.

RUIZ AIZPIRI, José María: *Geometría Descriptiva*, Madrid, Guadiana, 1973.

SÁNCHEZ GALLEGO, Juan Antonio: *Geometría Descriptiva. Sistemas de proyección cilíndrica*, Barcelona, Universitat Politècnica de Catalunya, 1993

SENABRE, Jorge: *Dibujo Técnico*, Zaragoza, Luis Vives, 1987.

SCHOLFIELD, P.H.: *Teoría de la proporción en arquitectura*, Barcelona, Labor, 1971.

TAIBO, Ángel: *Geometría Descriptiva y sus aplicaciones*, 2 vols., Madrid, Tebar, 1983.

VVAA, *Dibujo Técnico*, Madrid, Anaya, 1992.

VVAA, *Dibujo Técnico*, Madrid, Bruño, 1978.

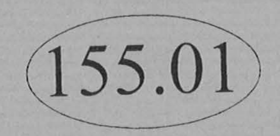
Índice

NOTAS

NOTAS

NOTAS

CUADERNO



CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
info@mairea-libros.com

